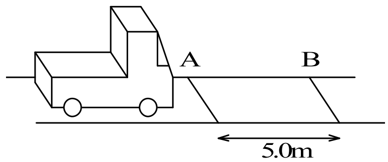
1.（等加速度運動　目的：等加速度運動の公式を使いこなす。問題を整理する能力を養う。）

直線上の道路に，A，B の 2 本の線が 5.0m の間隔で道路に垂直に交差して引かれている。この線上を一定の加速度で運動しているトラックが通過する。トラックの先端が A を通過してから後端が B を通過するまでの時間は 0.80s であった。また，トラックの先端が A，B を通過するときの速さはそれぞれ 12m/s と 13m/s であった。



(1)トラックの加速度の大きさと向きを求めなさい。

(2)トラックの先端が A を通過してから，先端が B を通過するまでの時間を求めよ。

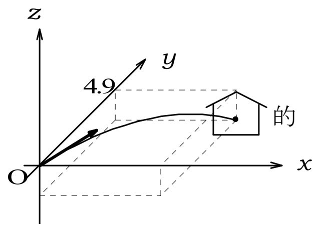
(3)このトラックの長さを求めよ。

(4)トラックの後端が B を通過するときの速さを求めよ。

(解答)(1)　$2.5\mathrm{m/s^2}$，向きは　トラックの進行方向 (2)　0.40s (3)　5.4m (4)　14m/s

2.（放物運動）目的：3 次元の放物運動についても，整理して基本通りに解く能力を養う）

伝統行事として行われる流鏑馬（やぶさめ）について考える。一定の速さ 9.8m/s で水平な直線上を走る馬に乗った射手が，矢を馬の進行方向から直交する方向に水平に打ち出して的に当てた。射手から見た矢の打ち出される速さを 19.6m/s とする。射手が矢を放ったときの矢の位置を原点 O とし，馬の進行方向に x 軸，進行方向から矢を射た側に直交する方向に水平に y 軸，鉛直上向きに z 軸をとる。的は，馬の走路から水平に 4.9m 離れている。重力加速度の大きさを $9.8\mathrm{m/s^2}$ とし，矢の大きさは無視できるものとして以下の問に答よ。



(1)矢を射た瞬間の矢の速度の大きさと，速度の向きを求めよ。向きは x 軸からの角度を θ とし，$\tan\theta$ で答よ。

(2)矢を射た瞬間を時刻 $t=0\mathrm{s}$ とする。矢が的に当たる前の時刻 t での矢の位置座標(x, y, z)を t を用いて表せ。

(3)矢が的に当たるまでの時間を求めよ。

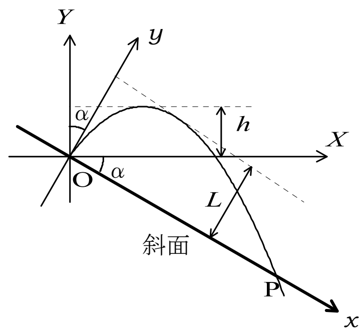
(4)的の x 座標と，z 座標を求めよ。

(5)矢が的に衝突した瞬間の，矢の速度の大きさを求めよ。

(解答)(1) 22m/s　，　$\tan\theta=2.0$　(2)　$x=9.8t$，$y=19.6t$，$z=-4.9t^2$

(3)　0.25s (4)　$x\fallingdotseq 2.5\mathrm{m}$　，$z\fallingdotseq -0.31\mathrm{m}$　(5)　22m/s

3.（斜面上の放物運動） 目的：放物運動の方向の分け方は，鉛直と水平だけではない。



図のように，水平面から角 α だけ傾いた固定した滑らかな斜面と，質量 m の小球を用意する。原点 O から斜面に垂直な向きに，速さ V_0 で小球を投げ上げた。重力の加速度を g として，次の問いに答えよ。

(1)小球が到達する，水平面 OX からの最大の高さ h を求めよ。

(2)小球が到達する，斜面 Ox からの最大距離 L を求めよ。

(3)小球が斜面へ到達したときの運動エネルギーE を求めよ。

(4)小球が斜面に到達した点を P とする。原点からの距離 OP = S を求めよ。

(5)$m = 1.0\times10^{-1}$kg，$\alpha = 30^\circ$ ，$V_0 = 1.0\times10^2$m/s，$g = 9.8$m/s^2 として，h，L，E，S の値を単位をつけて求めよ。

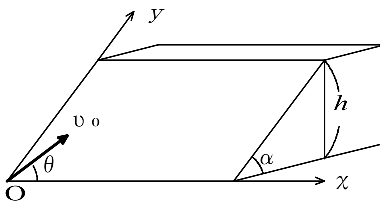
（山形大 1995）

(解答)(1) $\dfrac{V_0^2\cos^2\alpha}{2g}$ (2) $\dfrac{V_0^2}{2g\cos\alpha}$ (3) $\dfrac{1}{2}mV_0^2(4\tan^2\alpha+1)$ (4) $\dfrac{2V_0^2\tan\alpha}{g\cos\alpha}$

(5) $h \fallingdotseq 3.8\times10^2$m ， $L \fallingdotseq 5.9\times10^2$m ， $E \fallingdotseq 1.2\times10^3$J ， $S \fallingdotseq 1.4\times10^3$m

4.（斜面上を転がる運動）目的：加速度の方向が一定なら，放物運動と同じように解けることを学ぶ

スケートボードで斜面をかけ上がる遊びをモデル化して，質点の運動として考えてみよう。図に示すように，水平な床の上にある高さ h の壁に，なめらかな平板を角 α だけ傾けて立てかけ固定した。斜面と床が交わる辺を x 軸，それに垂直に斜面に沿って y 軸をとる。



この座標の原点 O から，質量 m の質点を x 軸となす角 θ，初速 υ_0 で斜面に沿って滑らせた。板の幅は十分広いものとし，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

(1)斜面上で運動している質点に働く力の x，y 成分を求めよ。

(2)滑らせ始めた瞬間を $t = 0$ とするとき，時刻 t における質点の速度の x，y 成分を求めよ。

(3)斜面を越えるのに必要な初速の最小値を求めよ。

また，質点が斜面を越えないように初速 υ_0 を(3)で求めた最小値より小さくして，前と同様に x 軸となす角 θ で斜面に沿って滑らせた。

(4)質点が再び床に達したときの原点からの距離 x を求めよ。

(5)角 θ を変えるとき，距離 x の最大値を求めよ。またそのときの角 θ はいくらか。

(解答)(1)x 成分 0 ， y 成分 $-mg\sin\alpha$ (2)x 成分 $\upsilon_0\cos\theta$ ，y 成分 $\upsilon_0\sin\theta - g\sin\alpha\cdot t$

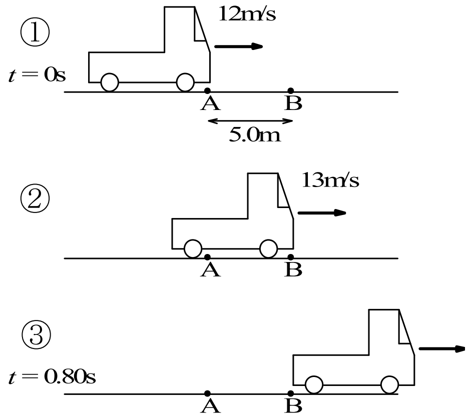
(3) $\dfrac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta}$ (4) $\dfrac{\upsilon_0^2\sin2\theta}{g\sin\alpha}$ (5) 最大値 $=\dfrac{\upsilon_0^2}{g\sin\alpha}$ ， $\theta = 45^\circ$

1. (解説)等加速運動の公式は，頭に入っていると思うが，初速度 v_0 [m/s]，加速度 a [m/s^2]で時間 t [s]後の速度を v [m/s]，変位を x [m]として

$$v=v_0+at$$
$$x=v_0t+\frac{1}{2}at^2$$
$$v^2-v_0^2=2ax$$

単なる等加速度直線運動の問題なので，問題文を読み間違えたりしないようにしよう。問題の内容をよく整理できるように，心がけましょう。

(解答)問題文には，次の①～③の状態が与えられている。



①トラックの先端が，線 A を通過する時の速さは 12m/s
②トラックの先端が，線 B を通過する時の速さは 13m/s
③トラックの後端が線Bを通過する時刻は，①の状態を時刻 $t=0$s とし，$t=0.80$s

(1)トラックの進行方向を生とする。①と②を考えて，加速度を a[m/s^2]として

$$13^2-12^2=2a\times5.0$$
$$\therefore\quad a=2.5\text{m/s}^2\qquad\cdots(\text{答})$$

向きは　トラックの進行方向　…(答)

(2)②の状態の時刻を t_2 [s]として

$$13=12+2.5\times t_2\quad\therefore\quad t_2=0.40\text{s}\qquad\cdots(\text{答})$$

(別)AB 間の距離が 5.0m であるので

$$5.0=12t_2+\frac{1}{2}\times2.5t_2^2$$

これを解いて

$$t_2=-10,0.40\text{s}$$

$t_2>0$ より　$t_2=0.40$s　…(答)

(3)トラックの長さを L[m]とする。①から③の状態までに，トラックは $5.0+L$ だけ変位しているので

$$5.0+L=12\times0.80+\frac{1}{2}\times2.5\times0.80^2$$
$$\therefore\quad L=5.4\text{m}\qquad\cdots(\text{答})$$

(4)トラックの後端が B を通過するときの速さを v [m/s]として

$$v=12+2.5\times0.80=14\text{m/s}\qquad\cdots(\text{答})$$

2. (解答)この運動では方向別に考えて
x 方向：初速度　9.8m/s の等速運動
y 方向：初速度 19.6m/s の等速運動
z 方向：初速度 0　加速度　−9.8m/s^2 の等加速度運動
をしている。

(1)矢を射た瞬間の速度の成分は、x 方向 9.8m/s、y 方向 19.6m/s、z 方向 0 である。速さ v_0 は

$$v_0=\sqrt{9.8^2+19.6^2}=9.8\sqrt{5}=9.8\times2.23=21.8\fallingdotseq22\text{m/s}\qquad\cdots(\text{答})$$

また x 軸となす角を θ とすると

$$\tan\theta=\frac{19.6}{9.8}=2.0\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)それぞれの方向に、等速、等加速度運動と考える。

$x=9.8t$　,　$y=19.6t$　,　$z=-\dfrac{1}{2}\times 9.8t^2=-4.9t^2$　…(答)

(3)的の y 座標は 4.9 であるので

$y=19.6t=4.9$　∴　$t=0.25\text{s}$　…(答)

(4)(3)で求めた時刻を(2)の式に代入すればよい。

$x=9.8\times 0.25=2.45\fallingdotseq 2.5\text{m}$　…(答)

$z=-4.9\times 0.25^2=0.306\fallingdotseq 0.31\text{m}$　…(答)

(5)速度の x、y 成分は変化していない。z 成分は

$-9.8t=-9.8\times 0.25=-2.45\text{m/s}$

ゆえに速さ v は

$v_1=\sqrt{9.8^2+19.6^2+(-2.45)^2}=\sqrt{2.45^2\times(4^2+8^2+1^2)}$

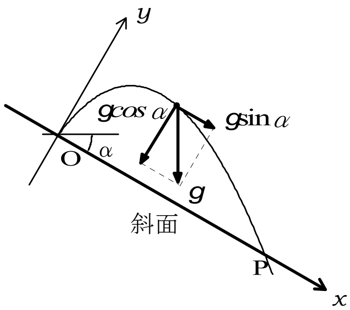
$=2.45\times 9=22.05\fallingdotseq 22\text{m/s}$　…(答)

3. (解説)重力による運動も，必ずしも水平，鉛直に分ける必要はなく，任意の 2 方向に分ければよい。この問題では，(2)以降は，斜面に平行と垂直に分けると解きやすい。ただし，加速度なども分解すること。

(1)X－Y 座標で考える。Y 方向の初速度は $V_0\cos\alpha$ であるので，最高点までの高さ h は

$0^2-(V_0\cos\alpha)^2=-2gh$　∴　$h=\dfrac{V_0^2\cos^2\alpha}{2g}$　…(答)

(2) x－y 座標で考える。重力加速度を x, y 方向へ分解して考えると，小球は，x 方向へは $g\sin\alpha$，y 方向へは $-g\cos\alpha$ の加速度でそれぞれ等加速度運動をする。初速度はそれぞれ，0 と V_0 である。斜面 Ox からもっとも離れた点では，y 方向への速度が 0 であるので



$0^2-V_0{}^2=-2g\cos\alpha\cdot L$　∴　$L=\dfrac{V_0^2}{2g\cos\alpha}$　…(答)

(3)小球が斜面に到達したとき，$y=0$ である。到達するまでの時間を t_1 として

$V_0t_1-\dfrac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t_1^2=0$

これを解いて，$t_1\neq 0$ でも考慮して、　$t_1=\dfrac{2V_0}{g\cos\alpha}$

このときの速度の x, y 成分をそれぞれ v_x, v_y として

$v_x=g\sin\alpha\cdot t_1=2V_0\tan\alpha$　,　$v_y=V_0-g\cos\alpha\cdot t_1=-V_0$

小球の運動エネルギー E は

$E=\dfrac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)=\dfrac{1}{2}mV_0^2(4\tan^2\alpha+1)$　…(答)

(4)t_1 のときの x を求めればよい。

$S=\dfrac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t_1^2=\dfrac{2V_0^2\tan\alpha}{g\cos\alpha}$　…(答)

(5)与えられた数値を代入する。

$h=3.82\square\times 10^2\fallingdotseq 3.8\times 10^2\text{m}$　,　$L=5.89\square\times 10^2\fallingdotseq 5.9\times 10^2\text{m}$

$E=1.16\square\times 10^3\fallingdotseq 1.2\times 10^3\text{J}$　,　$S=1.36\square\times 10^3\fallingdotseq 1.4\times 10^3\text{m}$

4. (解説)斜面上の放物運動などは，斜面に沿って x, y 軸を取って考えると良い。斜面に沿った力の成分は，y 方向だけであるので，$x-y$ 平面では放物運動をする。ただし，加速度も y 成分をとること。

(1)質点に働く力は，重力と斜面からの垂直抗力であるが，垂直抗力は斜面に垂直で x, y 成分はない。重力の成分のみである。

x 成分 $=0$　　,　　y 成分 $=-mg\sin\alpha$　　…(答)

(2)y 方向の加速度は，$-g\sin\alpha$ である。質点は xy 平面上で，加速度 $-g\sin\alpha$ の放物運動をする。初速度の x, y 成分はそれぞれ，$v_0\cos\theta$，$v_0\sin\theta$ であるので，時刻 t の速度の x, y 成分 v_x, v_y は

$v_x=v_0\cos\theta$　　,　　$v_y=v_0\sin\theta-g\sin\alpha\cdot t$　　…(答)

(3)斜面を超えないとして y の最大値を y_0 とすると

$$0-(v_0\sin\theta)^2=-2g\sin\alpha\cdot y_0 \qquad \therefore \quad y_0=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\sin\alpha}$$

これが，斜面の y 方向の長さ $\dfrac{h}{\sin\alpha}$ より大きくなれば，斜面を超える。

$$y_0=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\sin\alpha}\geqq\frac{h}{\sin\alpha} \qquad \therefore \quad v_0\geqq\frac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta} \qquad \text{最小値}\quad v_0=\frac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta} \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)床に達した時刻を t として，$y=0$ なので

$$0=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2 \qquad \therefore \quad t=0,\frac{2v_0\sin\theta}{g\sin\alpha}$$

$t=0$ は不適である。ゆえに x は

$$x=v_0\cos\theta\cdot t=\frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g\sin\alpha}=\frac{v_0^2\sin2\theta}{g\sin\alpha} \qquad \cdots(\text{答})$$

(5)$0<\theta\leqq90^\circ$ であるので，$\sin2\theta=1$ で x は最大となる。

$$\text{最大値}=\frac{v_0^2}{g\sin\alpha} \qquad \cdots(\text{答})$$

また，そのときの $\theta=45^\circ$　　…(答)