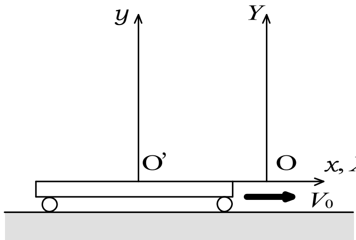
5.（慣性系）目的:観測者の立場の違いによる運動の見え方の違いを学ぶ。

水平な地上を一定の速度 V_0 で走る台車がある。地上で，台車の床面と同じ高さのある点を原点 O にとり，水平に X 軸，鉛直に Y 軸をとる。また，台車の床面上の点を原点 O'として，台車に固定した座標系を水平に x 軸，鉛直に y 軸とする。重力加速度の大きさを g とし，空気の抵抗は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。



I. O と O'が一致した時を時刻 $t=0$ とし，その瞬間，原点から小球を，台車から鉛直上方に初速度 v_0 で打ち上げた。

(1)時刻 t のとき，地上から見た小球の位置 X, Y を求めよ。また，台車に固定した座標系での位置 x, y を求めよ。また地上にいる観測者が見たときと，台車上の観測者が見たとき，それぞれどんな運動をするか答えよ。

(2)小球が最高点に達する時刻 t_1 と，そのときの床からの高さ h を求めよ。

小球が最高点に達すると同時に，台車を，X 軸正方向に一定の加速度 $\alpha(>0)$ で運動させる。

(3)時刻 $t(>t_1)$ のとき，地上から見た小球の位置 X, Y を求めよ。また，台車に固定した座標系での位置 x, y を求めよ。必要であれば，t_1, h を用いてよい。地上にいる観測者が見たときと，台車上の観測者が見たとき，それぞれどんな運動をするか答えよ。

(4)小球が台車の床に落下する時刻および，そのときの地上から見た小球の位置 X を求めよ。

(5)小球が落下した床上の位置 x を，h, g, α で表せ。

Ⅱ. 今度は，O と O'が一致した時刻 $t=0$ で，台車を X 軸正方向に一定の加速度 $\alpha(>0)$ で運動させる。

(6)時刻 $t=0$ で，台車上の原点 O'から小球を初速度 v_0 で打ち出して，再び原点 O'に落下するようにしたい。x 軸から角 θ 上方に打ち出すとして，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(7)小球の，地上から見た初速度の X, Y 成分を v_0, V_0, θ を用いて表せ。

(解答)(1)　$X=V_0t$，$Y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$，$x=0$，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$

小球は地上から見て放物運動，台車から見て鉛直投射

(2) $t_1=\frac{v_0}{g}$，$h=\frac{v_0^2}{2g}$　(3) $X=V_0t$，$Y=v_0t+\frac{1}{2}gt^2$

$x=-\frac{1}{2}\alpha(t-t_1)^2$，$y=v_0t-\frac{1}{2}gt^2$ あるいは $y=h-\frac{1}{2}g(t-t_1)^2$

地上から見て放物運動，台車から見て等加速度直線運動する。

(4) $t_2=\frac{2v_0}{g}$，$X=\frac{2V_0v_0}{g}$ (5) $\frac{\alpha}{g}h$ (6) $\tan\theta=\frac{g}{\alpha}$ (7)X 成分＝$V_0+v_0\cos\theta$，Y 成分＝$v_0\sin\theta$

6.

(気球からの斜方投射)

鉛直上向きに一定の速さ 9.8m/s で上昇している気球から、気球から見て速さ 19.6m/s で水平から 30° 上方にボールを投げた。このときの気球の地上からの高度は 24.5m であった。重力加速度の大きさを 9.80m/s^2、空気の抵抗は無視でき、また気球はボールを投げた後も速度は変化しないものとする。以下の問に答えよ。

(1)地上から見てボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か。また、そのときの地上からの高さを求めよ。

(2)ボールが、気球から見て最高点に達するまでの時間を求めよ。また, そのときの気球から見たボールの高さを求めよ。また, 気球から見たボールの速度の大きさと向きを求めよ。

(3)気球とボールが同じ高さになるのは、投げてから何秒後か。また, そのとき気球とボールの水平距離を求めよ。

(4)気球とボールが同じ高さになったとき, 気球から見たボールの相対速度の大きさと向きを求めよ。

(5)ボールが地面に衝突するのは、投げてから何秒後か。また、そのときのボールの速度を求めよ。

(解答) (1)2.00s , 44.1m (2)1.0s , 4.9m , 17m/s (3) 2.0s , 34m
(4) 19.6m/s , 水平より 30° 下向き (5)5.0s , 34m/s

5. (解説)等速運動している観測者から見ても，物理法則は静止系と同じである。このような系を慣性系という。台車が等速運動しているとき，台車から見た小球の運動は，台車が動いていることを意識しなくて良い。

加速度運動している観測者から見る場合は，あらゆる物体に慣性力が働いていることを考えれば，それ以外の物理法則は慣性系と同じである。

あるいは，観測者から見た物体の相対加速度を考えて解けばよい。

(1)小球は地上から見て水平(X方向)にV_0，鉛直(Y方向)にv_0の初速度で放物運動する。ゆえに

$$X = V_0 t \quad , \quad Y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots(答)$$

地上から見て放物運動　　…(答)

台車から見ると，小球は初速度v_0の鉛直投射をする。

$$x = 0 \quad , \quad y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots(答)$$

(参考)xは台車から見た相対位置と考えてもよい。台車のX軸上での位置を$X_{台}$とすると$X_{台} = V_0 t$であるので，台車から見た小球の位置(相対位置：相対速度などと同じ考え方)xは

$$x = X - X_{台} = 0$$

(2)地上から見ても台車から見ても鉛直方向の運動は同じである。最高点までの時間は

$$0 = v_0 - gt \qquad \therefore \quad t_1 = 0, \frac{v_0}{g}$$

$t_1 = 0$は不適であるので　$t_1 = \dfrac{v_0}{g}$　　…(答)

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2}{2g} \qquad \cdots(答)$$

(3)地上から見た場合，台車の運動は小球の運動に影響を与えないので

$$X = V_0 t \quad , \quad Y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$　　地上から見て：放物運動　　…(答)

台車から見た場合，小球はx負の方向に加速度αを持つ。最高点で台車から見た小球の速度は0であるので

$$x = -\frac{1}{2}\alpha(t - t_1)^2 \quad \cdots① \qquad \cdots(答)$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \cdots(答)$$

あるいは，　$y = h - \dfrac{1}{2}g(t - t_1)^2$　　…②

台車から見た加速度の向きは，図1のようになる。ただし，

$\tan\theta = \dfrac{g}{\alpha}$である。

最高点で初速度が0なので，その後，小球は

図の加速度の方向に等加速度直線運動する。　　…(答)

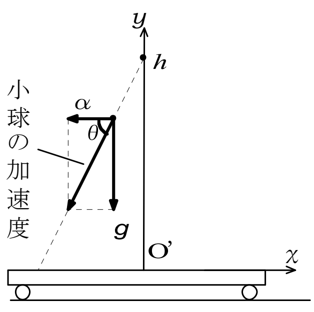


図 1

(参考)①，②よりxとyの関係式を求めると

$$y = \frac{g}{\alpha}x + h$$

で，最高点を通る直線である。

(4)落下する時刻を t_2 として，鉛直方向には加速度 g の運動であるので

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g} \quad , \quad X = V_0 t_2 = \frac{2V_0 v_0}{g} \quad \cdots(答)$$

(5) t_2 を①式に代入する。

$$x = -\frac{1}{2}\alpha(t_2 - t_1)^2 = -\frac{v_0^2\alpha}{2g^2} = -\frac{\alpha}{g}h$$

(別解)図 1 より

$$x = -\frac{h}{\tan\theta} = -\frac{\alpha}{g}h$$

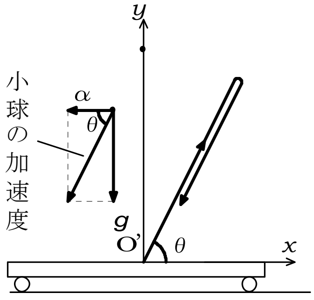


図 2

(6)図 2 のように，小球の加速度の方向に投げ出せば，戻ってくる。ゆえに，投げ出す方向は図 1 の θ となる。

ゆえに，　$\tan\theta = \dfrac{g}{\alpha}$

(別解)小球の x, y 座標はそれぞれ，

$$x = v_0\cos\theta \cdot t - \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad , \quad y = v_0\sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2$$

$y = 0$ となる時刻で，$x = 0$ となるようにすると、答が求まる。

(7)地上から見た小球と台車の初速度をそれぞれ $\vec{u_0}$，$\vec{V_0}$，台車から見た小球の初速度を $\vec{v_0}$ とすると

$$\vec{v_0} = \vec{u_0} - \vec{V_0} \qquad \therefore \quad \vec{u_0} = \vec{v_0} + \vec{V_0}$$

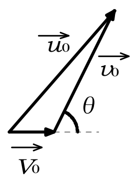


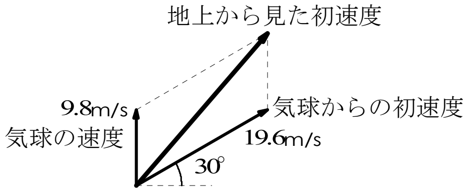
図 3

図 3 も参考に，の X, Y 成分を求めると

X 成分 $= V_0 + v_0\cos\theta$ 　，　Y 成分 $= v_0\sin\theta$

6.(解説)等速運動している観測者から見ても，物理法則は静止系と同じである。気球は等速運動しているので、気球から見ても斜方投射である。地上から見た場合と初速度が異なる。問により、地上からと，気球からの立場を使い分けて解く。

(1)地上から見たボールの初速度を考える。気球の速度と，気球から見たボールの初速度の合成であるので



地上から見たボールの初速度

水平方向 : $19.6\cos 30° = 9.8\sqrt{3}$ m/s

鉛直方向 : $9.8 + 19.6\sin 30° = 19.6$ m/s

ゆえに，地上から見て最高点に達するまでの時間 t_1 は

$19.6 - 9.80t_1 = 0 \quad \therefore \quad t_1 = 2.00$ s　　…(答)

また，そのときの地上からの高さは

$24.5 + 19.6t_1 - 4.90t_1^2 = 24.5 + 19.6 \times 2.00 - 4.90 \times 2.00^2 = 44.1$ m　　…(答)

(2) 気球は等速運動をしているので，気球から見ても斜方投射である。気球から見た初速度は

水平方向 : $19.6\cos 30° = 9.8\sqrt{3}$ m/s

鉛直方向 : $19.6\sin 30° = 9.8$ m/s

気球から見て最高点までの時間を t_2 とすると

$9.8 - 9.80t_2 = 0 \quad \therefore \quad t_2 = 1.0$ s　　…(答)

また，そのときの気球からの高さは

$9.8t_2 - 4.90t_2^2 = 9.8 \times 1.0 - 4.90 \times 1.0^2 = 4.9$ m　　…(答)

気球から見て最高点では速度の鉛直成分が 0，水平成分のみなので

$9.8\sqrt{3} = 9.8 \times 1.73 = 16.9$□ ≒ 17m/s　　…(答)　　向きは　水平方向　　…(答)

(3)気球から見た高さが 0 なので，それまでの時間を t_3 として

$$9.8t_3 - 4.90t_3^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_3 = 0, 2.0\text{s}$$

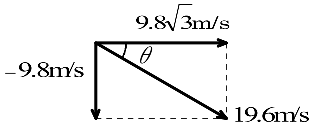
$t_3 = 0$ は不適であるので　$t_3 = 2.0\text{s}$　…(答)

(放物運動なので，$t_3 = 2t_2$ は当然である。)

水平距離は

$$9.8\sqrt{3}t_3 = 9.8 \times 1.73 \times 2.0 = 33.9\square \fallingdotseq 34\text{m} \qquad \cdots(答)$$

(4)気球から見た相対速度とは，ようするに気球から見た速度である。気球と同じ高さになったときの速さは，鉛直成分が初速度と逆になる。



水平方向　$9.8\sqrt{3}\text{m/s}$

鉛直方向　$9.8 - 9.80t_3 = 9.8 - 9.80 \times 2.0 = -9.8\text{m/s}$

ゆえに速度の大きさは

$$\sqrt{\left(9.8\sqrt{3}\right)^2 + \left(-9.8\right)^2} = 19.6\text{m/s} \qquad \cdots(答)$$

また、水平となす角を θ として

$$\tan\theta = \left|\frac{-9.8}{9.8\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \theta = 30^\circ$$

向きは、水平より 30°　下向き　…(答)

(斜方投射なので、初速度と大きさが同じで、向きは鉛直方向のみ逆になるので当然である)

(5)地上から見て解く。地面に落下する時間を t_4 として

$$24.5 + 19.6t_4 - 4.90t_4^2 = 0$$

$$t_4^2 - 4t_4 - 5 = 0$$

$\therefore \quad t_4 = -1.0, 5.0$

$t_4 > 0$ より　$t_4 = 5.0\text{s}$　…(答)

地上から見た速度は

水平方向　$9.8\sqrt{3}\text{m/s}$

鉛直方向　$19.6 - 9.80t_4 = 19.6 - 9.80 \times 5.0 = -29.4\text{m/s}$

ゆえに速度の大きさは

$$\sqrt{\left(9.8\sqrt{3}\right)^2 + \left(-29.4\right)^2} = 19.6\sqrt{3} = 19.6 \times 1.73 = 33.9\square \fallingdotseq 34\text{m/s} \qquad \cdots(答)$$

(力学的エネルギー保存則からも求められる)