7.（力のつりあい）目的：ややこしい状況に惑わされずに，力の図を書く

図１のように，質量 $5m$ の人が，床に置かれた質量 $3m$ のゴンドラに乗っている。天井から吊されたなめらかに回る定滑車にロープをかけ，ロープの一端をゴンドラに接続し，もう一端を人が引く。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。ただし，ロープの質量は無視できるものとする。

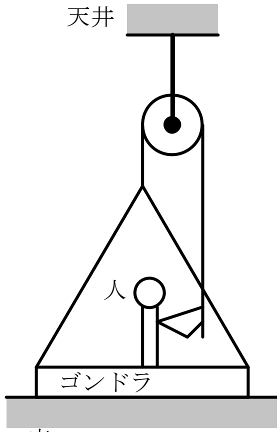


図 1

人がロープを鉛直下向きに大きさ F_1 の力で引いた。人もゴンドラも浮きかがらなかった。

(1)人およびゴンドラに働く力を図示せよ。力には何の力かを明記せよ。

(2)ゴンドラが床から受ける力の大きさと向きを求めよ。

(3)定滑車の質量が無視できるとすると，天井が定滑車を引く力を求めよ。

次に，人がロープを引く力を大きくしていくと，ゴンドラが浮き上がった。ただし，人はゴンドラと接した状態であった。

(4)ゴンドラが浮き上がったとき，人がロープを引く力の大きさを求めよ。また，人がゴンドラから受ける力の大きさを求めよ。

次に，図２のようにゴンドラに質量 m の動滑車をつける。一端を天井に固定したロープを動滑車にかけ，さらに定滑車を通して他端を人が引く。

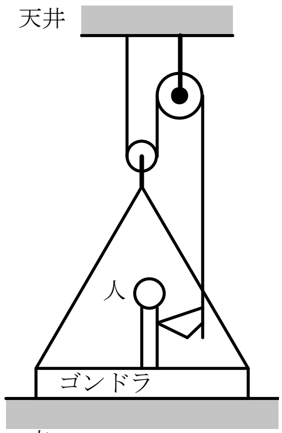


図 2

人がロープを鉛直下向きに大きさ F_2 の力で引いた。人もゴンドラも浮きかがらなかった。

(5)ゴンドラ及び動滑車に働く力を図示せよ。力には何の力かを明記せよ。

(6)動滑車がゴンドラを引く力，ゴンドラが床から受ける力の大きさと向きを求めよ。

次に，人がロープを引く力を大きくしていくと，ゴンドラが浮き上がった。ただし，人はゴンドラと接した状態であった。

(7)ゴンドラが浮き上がったとき，人がロープを引く力の大きさを求めよ。

(解答)(1)　略　(2)　$8mg-2F_1$　鉛直上向き　(3)　$2F_1$　(4)引く力 $4mg$
ゴンドラからの力　mg　(5)略　(6)ゴンドラを引く力　$2F_2-mg$　鉛直上向き
床からの力　$9mg-3F_2$　鉛直上向き　(7) $3mg$

8. (モーメント)目的:少し複雑なモーメントの求め方を学ぶ

傾き角を変えることのできる斜面に，質量 m の直方体の物体が置かれている。物体の密度は一様である。斜面の傾きを変えることによって直方体が動き出す瞬間のことを考える。直方体と斜面との静止摩擦係数は μ，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

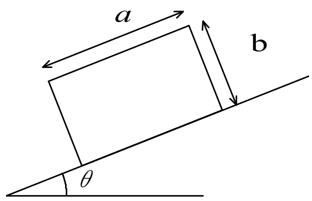


図 1

図 1 のように 1 辺の長さが a の面を斜面に置き，傾き角を徐々に増していった。

(1)傾き角が θ のとき，物体に働く静止摩擦力の大きさを求めよ。

さらに傾き角を増すと，物体は回転することなく傾き角 θ_1 のとき滑り出した。

(2)$\tan\theta_1$ を求めよ。

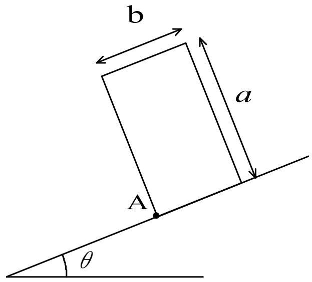


図 2

次に，図 2 のように 1 辺の長さが b の面を斜面に置き，傾き角を徐々に増していった。傾き角を θ にしたときの，斜面から物体に働く垂直抗力の大きさと，作用点を求めよう。物体の斜面の下側の稜線を A とする。

(3)物体に働く力のつりあいより，垂直抗力の大きさと求めよ。

(4)A のまわりの重力のモーメントを求めよ。また静止摩擦力のモーメントを求めよ。ただし，反時計回りのモーメントを正とする。

(5)物体の底面に働く垂直抗力の作用点の A から斜面に沿った距離を x とする。物体に働く力のモーメントの和が 0 であることより，x を求めよ。

傾き角を増していくと，傾き角 θ_2 のとき物体は A を支点として回転を始めた。

(6)(5)で求めた垂直抗力の作用点は，物体の底面内になければならない。このことより回転を始めるときの傾き角 θ_2 を求めよ。

(解答)(1) $mg\sin\theta$　(2)　$\tan\theta_1=\mu$　(3)　$mg\cos\theta$　(4)　重力　$-\dfrac{mg}{2}\left(b\cos\theta-a\sin\theta\right)$

静止摩擦　0　(5)　$x=\dfrac{1}{2}\left(b-a\tan\theta\right)$　(6)　$\tan\theta_2=\dfrac{b}{a}$

7. (解説)力を考えるとき大切なことは，力が

　　何①に働く，何②からの力

を考えることである。これを意識することにより，力の向きもわかりやすくなるし，また，作用・反作用もわかりやすい。①，②を入れ替えた

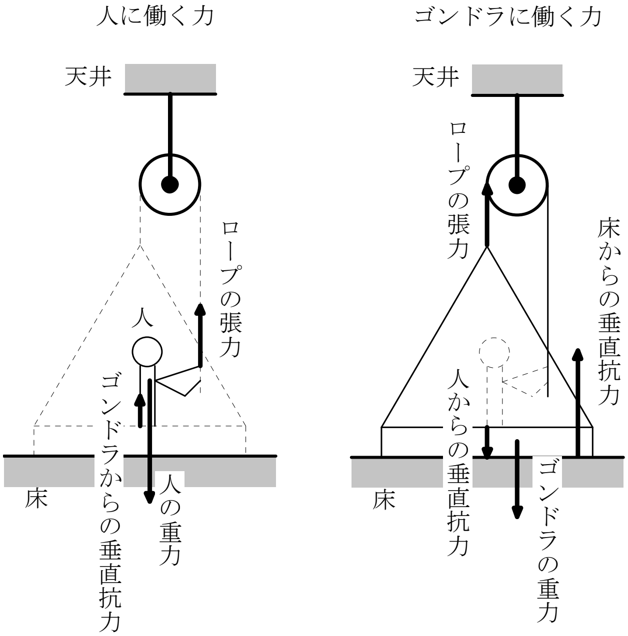
　　②に働く，①からの力

が必ず存在し，元の力と反対向きで同じ大きさである。

この問題のポイントは，ロープが人(手)を引く力である。ロープに働く人が引く力は下向きに働いているが，その反作用の人に働くロープが引く力は上向きに働く。後は，物体ごとに力のつりあいを考えればよい。

また，滑車にロープから働く力は，ロープの方向に張力と同じ大きさの力が働いていると考えればよい。

(1)何に働くか意識しながら描こう。



(2)人とゴンドラとの間の垂直抗力の大きさを N_1，床とゴンドラとの間の垂直抗力の大きさを R_1 とする。ロープの張力は F_1 である。人，ゴンドラのつりあいをそれぞれ考える。

人　　：$5mg - F_1 - N_1 = 0$　…①

ゴンドラ：$3mg - F_1 + N_1 - R_1 = 0$　…②

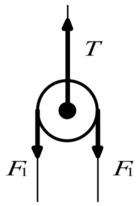
①式より

$N_1 = 5mg - F_1$　…③

これと②式より

$R_1 = 8mg - 2F_1$　…④　向きは鉛直上　…(答)

(3)天井と定滑車の間の力の大きさを T とすると，定滑車に働く力は右図となる。定滑車の質量は無視できるので，つりあいより



$2F_1 - T = 0$　∴　$T = 2F_1$　…(答)

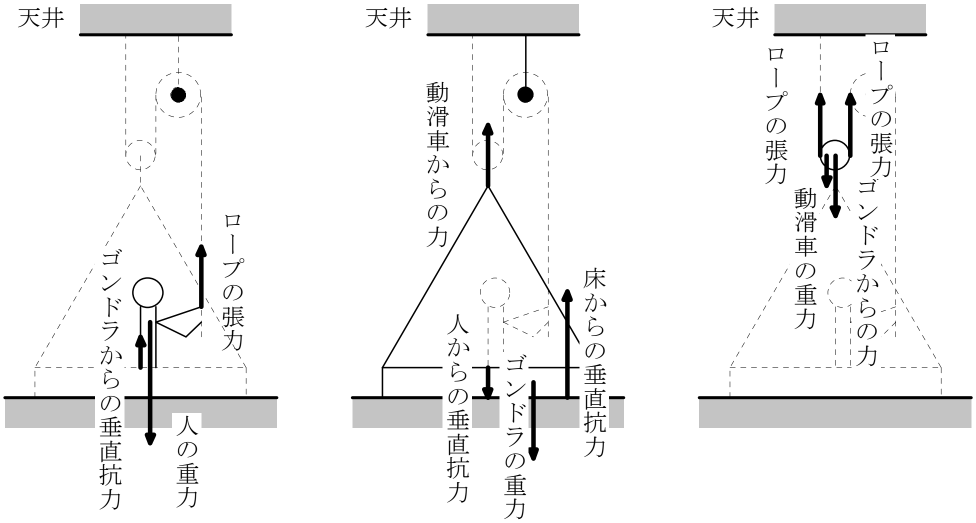
(4)ゴンドラと床との垂直抗力が 0 になったとき床から離れる。④式より，そのときの F_1 を求める。

$R_1 = 8mg - 2F_1 = 0$　∴　$F_1 = 4mg$　…(答)

またそのとき，人が床から受ける力は③式より

$N_1 = 5mg - F_1 = mg$　…(答)

(5)参考までに，人に働く力も描いた。



(6) 人とゴンドラとの間の垂直抗力の大きさを N_2，床とゴンドラとの間の垂直抗力の大きさを R_2，動滑車とゴンドラ間の力を f とする。人，ゴンドラ，動滑車のつりあいをそれぞれ考える。

人　　：　$5mg - F_2 - N_2 = 0$　　…③

ゴンドラ：　$3mg - f + N_2 - R_2 = 0$　　…④

動滑車　：　$mg - 2F_2 + f = 0$　　…⑤

③，④，⑤式より

$N_2 = 5mg - F_2$

$f = 2F_2 - mg$　　…(答)

$R_2 = 9mg - 3F_2$　　…⑥　　…(答)

(7) $R_2 = 0$ で床から離れる。⑥式より

$R_2 = 9mg - 3F_2 = 0$　　∴　$F_2 = 3mg$　　…(答)

8. (解説)垂直抗力は斜面と接する底面全体に働くが，合成して一つの力としたときの作用点を求める。

また，この問題の結論からわかるように斜面を傾けたとき剛体が転がる条件は，重力の作用線が物体の斜面下側の稜線よりさらに下側を通過するときである。

(4)の重力のモーメントの求め方は，ほかにもいろいろ考えられる。いろいろ試してみよう。

(1)静止摩擦の大きさを f とする。斜面に平行な方向のつりあいより

$mg\sin\theta - f = 0$　　∴　$f = mg\sin\theta$　　…(答)

(2)斜面からの垂直抗力の大きさを N として，斜面に垂直方向のつりあいより $N = mg\cos\theta_1$ である。滑り出す直前，静止摩擦が最大値 μN となる。ゆえに

$f = \mu N$

$mg\sin\theta_1 = \mu mg\cos\theta_1$　　∴　$\tan\theta_1 = \mu$　　…(答)

(3)(2)と同様に，斜面に垂直方向のつりあいより

$N = mg\cos\theta$　　…(答)

(4)重力は直方体の重心Gに働く。図1のように重力の作用線がAからおろした垂線と交わる点を B とする。AB 間の距離は $\frac{1}{2}\left(b\cos\theta - a\sin\theta\right)$であるので、重力のモーメントは，反時計回りを正として

$$-\frac{mg}{2}\left(b\cos\theta - a\sin\theta\right) \qquad \cdots(答)$$

静止摩擦は底面に平行なのでAに対する距離は 0

ゆえに　モーメントは　0　…(答)

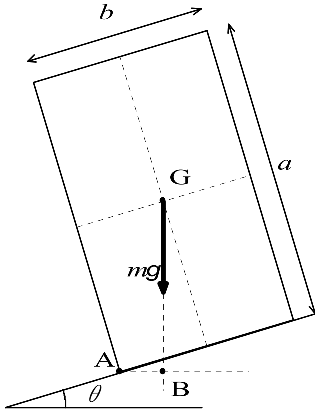


図 1

(別解)図 2 のように，重心で重力を斜面に平行な方向(大きさ $mg\cos\theta$)と，斜面に垂直な方向(大きさ $mg\sin\theta$) の成分に分解する。重心にこの2力が別々に働いていると考えて，モーメントを求める。それぞれの力を作用線にAからおろした垂線と交わる位置(CとD)に移動する。

$\mathrm{AC} = \frac{a}{2}$，$\mathrm{AD} = \frac{b}{2}$ であるのでAのまわりのモーメントは

$$mg\sin\theta \times \frac{a}{2} - mg\cos\theta \times \frac{b}{2} = -\frac{mg}{2}\left(b\cos\theta - a\sin\theta\right)$$

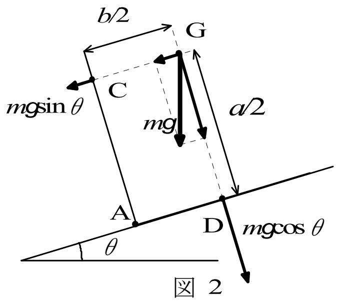


図 2

(5)Aのまわりの垂直抗力のモーメントは

$$Nx = mg\cos\theta \cdot x$$

静止摩擦のモーメントは 0 である。ゆえに

$$mg\cos\theta \cdot x - \frac{mg}{2}\left(b\cos\theta - a\sin\theta\right) = 0$$

$$\therefore \quad x = \frac{1}{2}\left(b - a\tan\theta\right) \qquad \cdots(答)$$

(参考)垂直抗力の作用点は，以下のようにしても求まる。

直方体に働く力のモーメントの和が 0 であるということは，直方体に働く力の作用線が1点で交わるということと同じである。図3のように重力と静止摩擦力は必ずE点で交わるので，垂直抗力の作用点もEでなければならない。ゆえにAE間の距離 x は

$$x = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\tan\theta$$

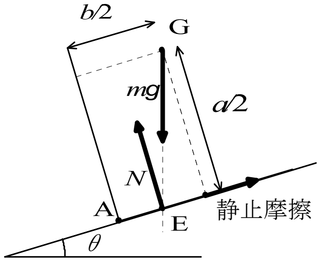


図 3

(6)垂直抗力は必ず，直方体の底面内に働くので $x \geqq 0$ である必要がある。ゆえに

$$x = \frac{1}{2}\left(b - a\tan\theta\right) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \tan\theta \leqq \frac{b}{a}$$

ゆえに，回転を始める角 θ_2 は　　$\tan\theta_2 = \frac{b}{a}$　　…(答)

(参考)これは，重力の作用線がAを通過する状態である。