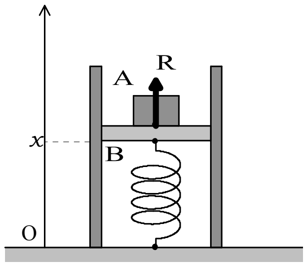
9. 目的:運動方程式の基本は，力の図であることを確認する。ばねの力を正確に表現する。
(鉛直ばねの運動)



鉛直に立てた中空の筒の中に，ばね定数k，自然長lのばねを入れ，その下端を床に固定し，上端には質量Mの薄い台Bをとりつけた。台は筒の内壁になめらかに接しており，台の面は水平になっている。ばねの質量は無視できるものとし，重力加速度はgとする。床の面を原点とし，鉛直上方にx軸をとって，次の空欄を埋めよ。

(1)図のように質量mの物体Aを台Bの上に静かにおくと，ばねは自然長lよりdだけ縮んで静止した。よってdは[ア]である。さらにばねを$3d$だけ縮めてはなす。物体Aが台Bとともに上方に運動しているときの位置xにおけるA，Bの加速度をα，AがBから受ける抗力をRとすると，Aの運動方程式は$m\alpha=$ [イ]となる。Bにはばねの力もはたらくので，Bの運動方程式は$M\alpha=$ [ウ]である。この2つの式からαを消去して，抗力Rを求めると，[エ]となる。

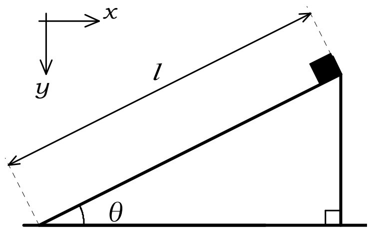
(2)やがてAはBを離れるが，それはRが[オ]になるときであるから，そのときのばねの長さは[カ]であり，Aの速度は[キ]である。そして，Aはその位置よりさらに[ク]だけ上がる。ただし，A，Bは鉛直方向にのみ上下するものとする。

(明治大)

(解答)(1)ア．$\dfrac{(M+m)g}{k}$，イ．$R-mg$　ウ．$k(l-x)-Mg-R$　エ．$\dfrac{km(l-x)}{M+m}$

(2)オ．0　カ．l　キ．$2g\sqrt{\dfrac{2(M+m)}{k}}$ or $2\sqrt{2gd}$　ク．$\dfrac{4(M+m)g}{k}$ or $4d$

10. 目的:観測する立場を明確にして，力を考える。
(動く斜面での運動)



図のように，なめらかな水平面に，傾角 θ のなめらかな斜面を持つ台が置かれている。台の質量はMで，斜面の長さはlである。台が静止している状態で，斜面の上端に質量 m の小物体を置き静かにはなす。重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ。

図で，水平右向きをx方向，鉛直下向きをy方向とする。台の加速度をA，小物体の加速度のx成分，y成分をそれぞれa_x, a_yとする。また，台と小物体の間に働く垂直抗力の大きさをNとする。

(1)台について，x方向の運動方程式をつくれ。

(2)小物体について，x, y方向の運動方程式をつくれ。

(3)台上で見た，小物体の相対加速度のx, y成分b_x, b_yを，A, a_x, a_yを用いて求めよ。

(4) b_x, b_yの関係をよく考えて，A, a_x, a_yの関係を式で表せ。

ここで，$M=5m$, $\theta=30^\circ$ とする。

(5) A, a_x, a_yを求めよ。

(6)小物体の斜面に沿って滑り降りる加速度を求めよ。

(7)小物体が，斜面の下端に到達するまでの時間を求めよ。

(8)小物体が下端に到達する直前，台と小物体の速度の x 成分をそれぞれ求めよ。

(9)小物体が斜面の下端に到達するまでに，台と小物体がそれぞれ水平方向に移動した距離を求めよ。

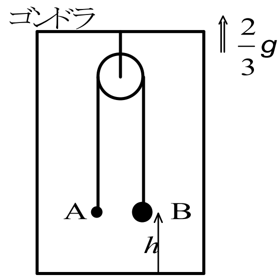
(解答)(1) $MA = N\sin\theta$ (2) x 方向：$ma_x = -N\sin\theta$ ，y 方向： $ma_y = mg - N\cos\theta$

(3) $b_x = a_x - A$ ，$b_y = a_y$ (4) $\tan\theta = \dfrac{a_y}{-(a_x - A)}$ (5) $A = \dfrac{\sqrt{3}}{21}g$ ，$a_x = -\dfrac{5\sqrt{3}}{21}g$，$a_y = \dfrac{2}{7}g$

(6) $\dfrac{4}{7}g$ (7) $t = \sqrt{\dfrac{7l}{2g}}$ (8)台：$\sqrt{\dfrac{gl}{42}}$ ，小物体：$-5\sqrt{\dfrac{gl}{42}}$ (9)台：$\dfrac{\sqrt{3}}{12}l$ ，小物体：$-\dfrac{5\sqrt{3}}{12}l$

11．目的：観測する立場を明確に！立場の違いをつなぐのは相対加速度！

（慣性力，相対加速度）



重力加速度の大きさ g として，右図のように，鉛直上向きに大きさ $\dfrac{2}{3}g$ の一定の加速度で運動しているゴンドラがある。ゴンドラの天井から，定滑車がつるされている。軽くて伸び縮みしないひもの両端に，それぞれ質量 m，$2m$ の物体 A，B がつるされて，定滑車にかけられている。はじめ，A，B ともにゴンドラの床から高さ h の位置で，ゴンドラに対して静止して支えられている。

A，B を静かにはなす。以下の問に答えよ。ただし，ひもは十分に長く，物体 A が滑車に衝突することはないものとする。また，ゴンドラ内の様子を，地上から観測できるものとする。

(1) 鉛直上向きを正として，地上の観測者からみたときの物体 A，B の加速度の大きさをそれぞれ a_1，a_2，ひもの張力を T とする。物体 A，B の運動方程式をそれぞれ求めよ。

(2)a_1，a_2 の関係を求めよ。

(3)a_1，a_2，T を求めよ。

(4)ゴンドラ内の観測者からみた B の加速度の大きさ α と向きを求めよ。

(5)以上の運動を，ゴンドラ内の観測者から見た場合の，物体 A，B の運動方程式を，α を用いてそれぞれ求めよ。また，α の大きさを求め，(4)と一致することを確認せよ。

物体 B はゴンドラの床と完全非弾性衝突をした後。ひもはたるんだ。

(6)A，B をはなしてから物体 B がゴンドラの床に衝突するまでの時間を求めよ。

(7)B が床と衝突した直後，物体 A のゴンドラに対する速さを求めよ。

(8)ゴンドラ内で見て，物体 A は衝突後さらにどれだけの高さ上昇するか求めよ。

(解答)(1) A: $ma_1 = T - mg$ ，B: $2ma_2 = T - 2mg$ (2) $a_1 + a_2 = \dfrac{4}{3}g$ (3) $a_1 = \dfrac{11}{9}g$ ，$a_2 = \dfrac{g}{9}$

$T = \dfrac{20}{9}mg$ (4) $\alpha = \dfrac{5}{9}g$ ，鉛直下向き (5)運動方程式 A: $m\alpha = T - mg - \dfrac{2}{3}mg$ ，

B: $2m\alpha = 2mg + \dfrac{4}{3}mg - T$ (6) $3\sqrt{\dfrac{2h}{5g}}$ (7) $\dfrac{\sqrt{10gh}}{3}$ (8) $\dfrac{h}{3}$

9. (解説)この問題で，はじめバネは自然長より縮んだ状態であるので，任意の x で式を立てるときも，縮んだ状態で考えた方がよい(伸びた状態までいくかどうかわからない)。x はバネの長さを表すので，自然長からの縮みは $l-x$ である。

(1)ア．A, B 一体で考える。鉛直方向の力のつりあいより

$$kd-(M+m)g=0 \qquad \therefore \quad d=\frac{(M+m)g}{k} \quad \cdots① \qquad \cdots(答)$$

イ．A には上向きの抗力と重力のみが働く。

$$m\alpha=R-mg \quad \cdots② \qquad \cdots(答)$$

ウ．B には下向きの抗力，重力と，ばねの弾性力 $k(l-x)$ が働く。

$$M\alpha=k(l-x)-Mg-R \quad \cdots③ \qquad \cdots(答)$$

エ．②, ③式より α を消去して R を求める。

$$R=\frac{km(l-x)}{M+m} \quad \cdots④ \qquad \cdots(答)$$

(2)オ．A と B が離れるのは，抗力 $R=0$　　…(答)

カ．④式より $R=0$ になるのは，　$x=l$　(自然長の時である)　　…(答)

キ．はじめ，自然長より $4d$ だけ下にあるので，自然長に戻ったときの速さを v として，力学的エネルギー保存則より

$$-(M+m)g\cdot 4d+\frac{1}{2}k(4d)^2=\frac{1}{2}(M+m)v^2$$

①の d を代入して v を求める。

$$v=2g\sqrt{\frac{2(M+m)}{k}} \qquad (d \text{ を用いて表すと } v=2\sqrt{2gd}\ ) \qquad \cdots(答)$$

ク．A は，速さ v で鉛直投射されたので，その位置より最高点までの高さを h として

$$0-v^2=-2gh \qquad \therefore \quad h=\frac{v^2}{2g}=\frac{4(M+m)g}{k} \qquad (d \text{ を用いると } h=4d\ ) \qquad \cdots(答)$$

10.(解説)小物体の加速度の方向は，斜面の方向とは異なる。解く前には特定できない。このような場合は，適当な 2 方向(この場合，水平，鉛直)にわけて，両方向に運動方程式をつくる。

斜面上から見ると，小物体は斜面に沿って運動するはずである。ゆえに斜面から見た相対加速度の方向は，斜面の方向である。

また，ここではやらなかったが，慣性力を考えて，斜面から見た運動方程式つくっても良い。

(1)小物体，台に働く力は図 1 のようになる。台に働く力の内，水平方向の成分を持つのは小物体からの垂直抗力のみである。ゆえに，運動方程式は，

$$MA=N\sin\theta \quad \cdots① \qquad \cdots(答)$$

(2)同様に図 1 より，小物体の運動方程式を，水平，鉛直方向に分けて考える。

x 方向：　$ma_x=-N\sin\theta \quad \cdots②$

y 方向：　$ma_y=mg-N\cos\theta \quad \cdots③ \qquad \cdots(答)$

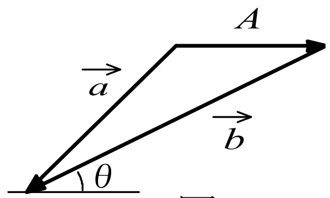


図 2

(3)床から見た台と小物体の加速度をそれぞれ $\vec{A}=(A,0)$，$\vec{a}=(a_x,a_y)$，台から見た小物体の(相対)加速度を $\vec{b}=(b_x,b_y)$ とすると，

$$\vec{b}=\vec{a}-\vec{A}$$

であるので，

$$b_x=a_x-A \quad , \quad b_y=a_y \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)台上から見ると，小物体の(相対)加速度は，斜面の方向であるはずである。b_x が，負であることも考えて，

$$\tan\theta=\frac{b_y}{-b_x}=\frac{a_y}{-(a_x-A)} \qquad \cdots④ \qquad \cdots(\text{答})$$

なお，これらを図にすると，図 2 のようになる。

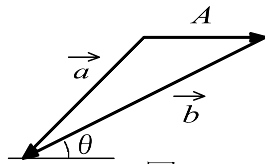


図 2

(5)①～④式に，$M=5m$，$\theta=30^\circ$ を代入して解く。

$$A=\frac{\sqrt{3}}{21}g \quad , \quad a_x=-\frac{5\sqrt{3}}{21}g \quad , \quad a_y=\frac{2}{7}g$$

$$(\text{参考}: N=\frac{10\sqrt{3}}{21}mg)$$

(6)台から見た相対加速度の大きさを求めるということである。つまり，図2の $\vec{b}$ の大きさを求める。相対加速度の大きさを b として，

$$b=\frac{b_y}{\sin 30^\circ}=\frac{a_y}{\sin 30^\circ}=\frac{4}{7}g \qquad \cdots(\text{答}) \qquad (\text{参考}: b_x=-\frac{2\sqrt{3}}{7}g,\quad b_y=\frac{2}{7}g\ )$$

(7)時間を t として，

$$l=\frac{1}{2}bt^2 \qquad \therefore\quad t=\sqrt{\frac{2l}{b}}=\sqrt{\frac{7l}{2g}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)台と小物体の速度の x 成分をそれぞれ V_x，v_xとする。

$$V_x=At=\frac{\sqrt{3}}{21}g\times\sqrt{\frac{7l}{2g}}=\sqrt{\frac{gl}{42}} \quad , \quad v_x=a_xt=-\frac{5\sqrt{3}}{21}g\times\sqrt{\frac{7l}{2g}}=-5\sqrt{\frac{gl}{42}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(9) 台と小物体の移動距離をそれぞれ X，xとして，

$$X=\frac{1}{2}At^2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{21}g\times\left(\sqrt{\frac{7l}{2g}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{12}l \qquad \cdots(\text{答})$$

$$x=\frac{1}{2}a_xt^2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5\sqrt{3}}{21}g\right)\times\left(\sqrt{\frac{7l}{2g}}\right)^2=-\frac{5\sqrt{3}}{12}l$$

11.（解説）このような問題では，観測する立場ごとにしっかりと整理して考えること。
ゴンドラ内で物体 A, B の運動はどう見えるのかよく考え，相対加速度を利用しよう。
また，加速度運動している観測者している立場で解く場合は，物体には慣性力が働くように見える。質量 m の物体に働く慣性力は，観測者の加速度を α として，加速度と逆向きに大きさ $m\alpha$ である。α は，物体の加速度ではなく，観測者の加速度であることに注意すること。慣性力さえ考えれば，観測者は自分が加速度運動していることを考えなくても良い

(1)A, B には鉛直上向きの張力 T と，鉛直下向きのそれぞれの重力 mg, $2mg$ が働いているだけである。地上から見て A の加速度は上向きであることは明らかだが，B はわからない。そこで，A, B とも上向きを正として運動方程式を作る。地上から見ているので，ゴンドラの動きは関係ない。

A:　$ma_1 = T - mg$　…①　,　B:　$2ma_2 = T - 2mg$　…②　…(答)

(2)ここで，ゴンドラから見ると A, B はどんな運動をするか考えてみる。ゴンドラ内で見ると，同じ大きさの（相対）加速度で，A は上向きに，B は下向きに運動しているはずである。A, B の相対加速度を，それぞれ α_1, α_2 とすると

A:　$\alpha_1 = a_1 - \frac{2}{3}g$　　B:　$\alpha_2 = a_2 - \frac{2}{3}g$

であるので，向きが逆であることも考慮して，

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$a_1 - \frac{2}{3}g = -\left(a_2 - \frac{2}{3}g\right) \qquad \therefore \quad a_1 + a_2 = \frac{4}{3}g \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

(3)①，②，③式を解く。

$$a_1 = \frac{11}{9}g \quad , \quad a_2 = \frac{g}{9} \quad , \quad T = \frac{20}{9}mg \qquad \cdots(答)$$

(4)ゴンドラから見た B の相対加速度 α_2 は，

$$\alpha_2 = \frac{g}{9} - \frac{2}{3}g = -\frac{5}{9}g$$

ゆえに鉛直下向きで，大きさ α は

$$\alpha = |\alpha_2| = \frac{5}{9}g \qquad \cdots(答)$$

（ちなみに，A の相対加速度は　$\alpha_1 = \frac{5}{9}g$ で，B と同じ大きさで鉛直上向きである。）

(5)ゴンドラ内で観測すると，A, B にはそれぞれ大きさ $\frac{2}{3}mg$，$\frac{4}{3}mg$ の慣性力が鉛直下向きにかかる。また，ゴンドラに対して，A は鉛直上向きに，B は鉛直下向きに大きさ α の加速度を持つので，それぞれの加速度の方向に運動方程式を作る。

A:　$m\alpha = T - mg - \frac{2}{3}mg$　…④　,　B:　$2m\alpha = 2mg + \frac{4}{3}mg - T$　…⑤

④，⑤式を解いて，　$\alpha = \frac{5}{9}g$　,　$T = \frac{20}{9}mg$　…(答)

で，もちろん結果は一致する。また，a_1, a_2 も計算して一致することを確かめよう。

(6)ゴンドラに対する加速度で考える。衝突までの時間を t とすると，

$$h = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5g}{9} t^2 \qquad \therefore \quad t = 3\sqrt{\frac{2h}{5g}} \qquad \cdots(答)$$

(7)ゴンドラに対する速度であるので，ゴンドラに対する加速度で考える。速度 v_1 として，

$$v_1 = \alpha t = \frac{5g}{9} \times 3\sqrt{\frac{2h}{5g}} = \frac{\sqrt{10gh}}{3} \qquad \cdots(答)$$

(8)衝突後，ひもの影響がなくなり，物体Aは鉛直投射となる。ゴンドラから見た加速度をβとすると

$$\beta = -g - \frac{2}{3}g = -\frac{5}{3}g$$

ゆえに，物体Aが上昇する距離Hは

$$0 - v_1^2 = 2\beta H \qquad \therefore \quad H = -\frac{v_1^2}{2\beta} = \frac{h}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$