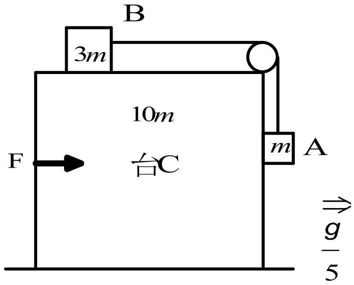
12. 目的:立場の違いを明確に！相対加速度を学ぶ。

（動く台上での運動）



なめらかな水平な床に，質量 $10m$ の直方体の台Cが置かれている。C には滑車がつけられ，軽い糸がかけられている。糸の両端には質量 m の物体Aと，$3m$ の物体Bがつけられ，Aは台Cの鉛直な側面に接してつるされ，Bは台Cの水平でなめらかな上面に置かれている。重力加速度の大きさを g とする。

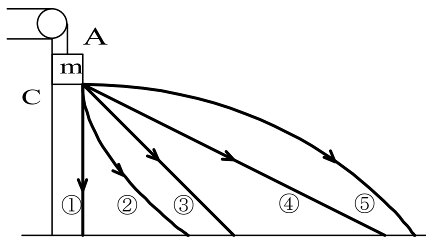
はじめ，全てが静止した状態から，台Cに水平右向きの一定の大きさの力 F を加える。同時に，A, Bを静かにはなすと，台Cは右向きの一定の加速度 $\dfrac{g}{5}$ で動き出し，また，A は C のなめらかな側面に接して落下した。以下の問に答えよ。

(1)Aの加速度の，鉛直下向きの成分を α とする。糸の張力の大きさを T として，台C上で観測したA, Bの運動方程式を求めよ。

(2)α, T を求めよ。

(3)床から見たBの加速度を求めよ。

(4)B が C 上で水平に距離 l だけ進む時間を求めよ。また，距離 l だけ進んだ時，Bの台に対する速度を求めよ。



(5)A が C の側面から受ける力の大きさを求めよ。

(6)台 C を押す力 F の大きさを求めよ。

(7)台が床から受ける力の大きさを求めよ。

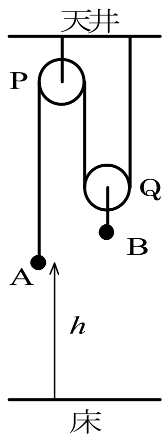
(8)床から見た A の運動の軌跡は，下図の①～⑤のどれか，最も適当なものを選べ。ただし，A が床に衝突する以前に，B が滑車に衝突することはないものとする。

(解答)(1)A:　$m\alpha = mg - T$　，B: $3m\alpha = T - \dfrac{3}{5}mg$　(2)　$\alpha = \dfrac{g}{10}$　，$T = \dfrac{9}{10}mg$　(3)　$\dfrac{3g}{10}$

(4) $2\sqrt{\dfrac{5l}{g}}$　，$\sqrt{\dfrac{gl}{5}}$　(5)　$N = \dfrac{mg}{5}$　(6)　$\dfrac{31}{10}mg$　(7)　$R = \dfrac{139}{10}mg$ (8)　④

13.

（動滑車による運動）



図のように，定滑車Pと動滑車Qが，天井からつり下げられている。また，おもりA, Bがそれぞれ図のようにつり下げられている。おもりBの質量は，m である。おもりと滑車をつり下げている糸はいずれもかるく，滑車P, Qの質量は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。

はじめ，A, Bをはなしても，静止したままであった。

(1)おもりAの質量を求めよ。

おもり A を質量 M のものに取り替え，静かにはなすと，A は一定の加速度で

落下した。A の鉛直下向きの加速度を a_1, おもり B の鉛直上向きの加速度を a_2 とする。A につながっている糸の張力の大きさを T とする。

(2)おもり A, B の運動方程式をそれぞれつくれ。

(3)おもりをはなしてから時間 t が経過したとき, A, B それぞれのはじめの位置からの移動距離 s_1, s_2 を, a_1, a_2, t で表せ。

(4) s_1, s_2 の関係をよく考えて, a_1, a_2 の関係を式で表せ。

(5) a_1, a_2, T を, M, m, g で表せ。

ここで, $M = 2m$ とする。おもり A をはなしたとき, 床からの高さは h であった。

(6)おもり A が, 床に衝突するまでの時間を求めよ。

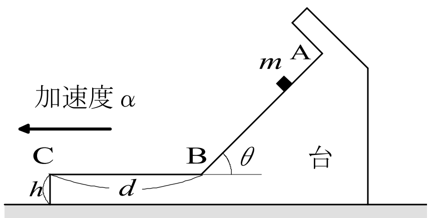
(7)おもり A が床に衝突する直前の, おもり A, B の運動エネルギーの和を求めよ。

(1) $\dfrac{m}{2}$ (2)A: $Ma_1 = Mg - T$, B: $ma_2 = 2T - mg$ (3) $s_1 = \dfrac{1}{2}a_1t^2$, $s_2 = \dfrac{1}{2}a_2t^2$ (4) $a_1 = 2a_2$

(5) $a_1 = \dfrac{2(2M-m)}{4M+m}g$, $a_2 = \dfrac{2M-m}{4M+m}g$, $T = \dfrac{3mM}{4M+m}g$ (6) $\sqrt{\dfrac{3h}{g}}$ (7) $\dfrac{3}{2}mgh$

14.

図に示すように, C 点の床からの高さ h〔m〕で B 点より傾角 θ の斜面の台が床の上を一定加速度 α〔m/s²〕で左方向に運動している。台の斜面上に質量 m〔kg〕の小物体があり, 台上で見て小物体は静止している。重力加速度を g〔m/s²〕として以下の問いに答えよ。ただし, 摩擦および空気抵抗はないものとする。



(1)台の水平方向の加速度 α〔m/s²〕を求めよ。

次に, 斜面上の小物体に斜面に沿って下方に台上から見て初速 v〔m/s〕を与えたところ, 小物体は斜面を下り, B 点を離れることなくなめらかに通過して C 点に向かった。

(2)小物体が台の端 C 点から落ちない BC 間の最小距離 d〔m〕を求めよ。

(3)BC 間の距離を $\dfrac{d}{2}$〔m〕にしたとき, 台の端 C 点から小物体が飛び出した。そのとき, 小物体が床に達するまでの小物体の水平到達距離 l〔m〕(飛び出した位置を O とする)を求めよ。ただし, 小物体が B 点を通過したときの床上から見た台の速度を V_0〔m/s〕とする。また, 台は小物体が飛び出した後, 直ちに停止するものとする。

(茨城大)

(解答)(1) $g\tan\theta$, (2) $\dfrac{v^2}{2\alpha}\left(=\dfrac{v^2}{2g\tan\theta}\right)$ (3) $(v+V_0)\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$

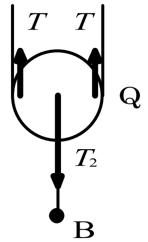
12. (解説) 基本どおりに運動方程式をつくる。ポイントは，A と B の移動距離の関係より，加速度の関係を考えるだけである。また，動滑車に質量はないので，B をつるす張力は $2T$ になる。

(1) A の質量を m_0 とする。また，A につながっている糸の張力の大きさを T_0 とする。B をつり下げている糸の張力の大きさは $2T_0$ である。おもり A，B についてのつりあいより

A:　$T_0 - m_0 g = 0$　　B: $2T_0 - mg = 0$

この2式を解いて，　$m_0 = \dfrac{m}{2}$　　…(答)

(2) B をつり下げている糸の張力の大きさは $2T$ である（＊注参照）。ゆえに，



A:　$Ma_1 = Mg - T$　…①　, B:　$ma_2 = 2T - mg$　…②　…(答)

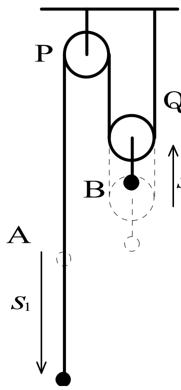
（＊注）滑車から B をつり下げる糸の張力を T_2 とする。動滑車 Q に働く力は右図のようになる。動滑車 Q の加速度は a_2 だが，質量は無いとして運動方程式をつくると

$$0 \times a_2 = 2T - T_2 \qquad \therefore \quad T_2 = 2T$$

(3) 等加速度で，初速度 0 であるので

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 \quad , \quad s_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

(4) 右図からわかるように，A が s_1 下がると，定滑車 P から天井までの糸の長さが s_1 短くなる。それが，s_2 の 2 倍になるので



$$s_1 = 2s_2$$

$$\frac{1}{2}a_1 t^2 = 2 \times \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad \therefore \quad a_1 = 2a_2 \quad \cdots③ \quad \cdots(\text{答})$$

(③の式が，直感的にわかるならそれはそれでよし)

(5) ①，②，③式を解く。

$$a_1 = \frac{2(2M - m)}{4M + m}g \quad , \quad a_2 = \frac{2M - m}{4M + m}g$$

$$T = \frac{3mM}{4M + m}g \qquad \cdots(\text{答})$$

(6) $M = 2m$ を代入して，a_1 を求めると

$$a_1 = \frac{2}{3}g$$

床に衝突するまでの時間を t_1 として

$$\frac{1}{2}a_1 t_1^2 = h \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{3h}{g}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(7) 衝突直前のおもり A，B の速さをそれぞれ v_1，v_2 とする。

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{2}{3}g \times \sqrt{\frac{3h}{g}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad , \qquad v_2 = a_2 t_1 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

おもり A，B の運動エネルギーの和 K は，

$$K = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = m \times \left(2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 + \frac{1}{2}m \times \left(\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 = \frac{3}{2}mgh \qquad \cdots(\text{答})$$

(別) おもり A,B 全体の力学的エネルギーが保存するので，運動エネルギー（の増加量）K は

$$K - 2mgh + mg\frac{h}{2} = 0 \qquad \therefore \quad K = \frac{3}{2}mgh$$

13.(解説)観測者の立場をしっかりと意識することを心がけよう。台上の観測者から見るときは，台は止まっていると考えてよい。

滑車は台 C の一部である。滑車に働く力を忘れないように。

A の運動も，水平・鉛直にしっかり分けて考えよう。

(1)台 C 上で観測すると，A は鉛直下向きに，B は水平右向きに，共に加速度 α で運動する。A に働く鉛直方向の力と，B に働く水平方向の力だけを描くと，図 1 のようになる。C 上で観測するので B には，慣性力が働く。A にも働くが，水平方向なので，いまは関係ない。それぞれの加速度の方向に，運動方程式を立てる。

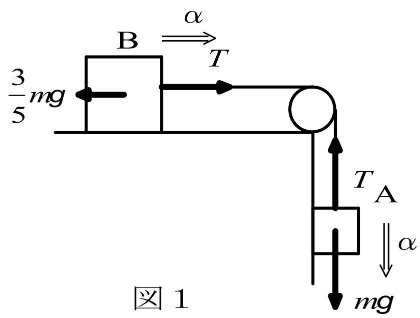


図 1

A:　$m\alpha = mg - T$　…①

B: $3m\alpha = T - \dfrac{3}{5}mg$　…②　…(答)

(2)①，②式を解いて

$$\alpha = \frac{g}{10} \quad , \quad T = \frac{9}{10}mg \quad \cdots(答)$$

(3)床から見た B の加速度を a_B とする。台 C から見た相対加速度が α であるので

$$\alpha = a_B - \frac{g}{5} \qquad \therefore \quad a_B = \alpha + \frac{g}{5} = \frac{3g}{10} \qquad \cdots(答)$$

(4)台 C に対する加速度 α で考える。時間を t_1 として，

$$\frac{1}{2}\alpha t_1^2 = l \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{5l}{g}} \qquad \cdots(答)$$

また，そのときの台 C に対する速度 u_1 は，

$$u_1 = \alpha t_1 = \frac{g}{10} \times 2\sqrt{\frac{5l}{g}} = \sqrt{\frac{gl}{5}} \qquad \cdots(答)$$

(5) 台 C と A の間に働く垂直抗力が N である。A は床から見て，水平方向に大きさ $\dfrac{g}{5}$ の加速度を持つので，水平方向の運動方程式をたてる。

$$m\frac{g}{5} = N \qquad \therefore \quad N = \frac{mg}{5} \qquad \cdots(答)$$

(6)台 C と B の間に働く垂直抗力の大きさを N_B，台 C と床との間の垂直抗力の大きさを R とすると，床から観測して台 C に図 2 のような力が働く。台 C についての水平方向の運動方程式より

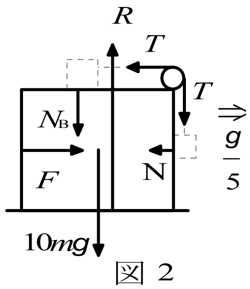


図 2

$$10m \times \frac{g}{5} = F - N - T = F - \frac{mg}{5} - \frac{9}{10}mg$$

$$\therefore F = \frac{31}{10}mg \quad \cdots(答)$$

(7)B についての鉛直方向のつりあいより，$N_B = 3mg$ である。台 C についての鉛直方向のつりあいより，

$$R - 10mg - N_B - T = 0 \qquad \therefore \quad R = \frac{139}{10}mg \qquad \cdots(答)$$

(8)A の加速度の，水平方向成分$\dfrac{g}{5}$，鉛直成分$\dfrac{g}{10}$である。ゆえに，床から見ると図3の方向の加速度となる。はじめ，静止状態であるので，加速度の方向に直線運動する。

∴　答 ④

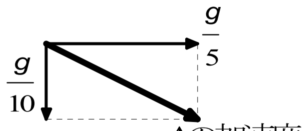


図 3

(別解)

はじめの A の位置を原点とし，水平右向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。A をはなした時を時刻 $t=0$ として，時刻 t のとき，

$$x=\frac{1}{2}\times\frac{g}{5}t^2=\frac{gt^2}{10}\quad ,\quad y=\frac{1}{2}\times\frac{g}{10}t^2=\frac{gt^2}{20}$$

ゆえに，軌跡は，$y=\dfrac{1}{2}x$

14. (解説)どこから観測しているかを明確にすること。台上で見て斜面上で小物体に働く力はつりあっているので，物体は静止もしくは等速直線運動をする。

BC 上では，床から見て等速運動である。台から見るときは，相対加速度を考えればよい

(1)台上で観測すると，小物体に働く力は慣性力を含んでつりあっている。斜面に平行な方向のつりあいより

$$mg\sin\theta-m\alpha\cos\theta=0\qquad\therefore\quad \alpha=g\tan\theta\qquad\cdots(答)$$

(2)台上で観測すると，斜面上では小物体に働く力は慣性力を含んでつりあっているので，小物体は等速運動する。したがって，B を通過したときの台から見た小物体の速さは v である。

小物体が BC 間にあるとき，台から見た小物体の加速度は左向きを正として$-\alpha$ である。台から見て静止するまでの距離が，小物体が落ちない BC 間の最小距離になる。

$$0-v^2=-2\alpha d\qquad\therefore\quad d=\frac{v^2}{2\alpha}\left(=\frac{v^2}{2g\tan\theta}\right)\qquad\cdots(答)$$

(3)小物体が B 点を通過したときの，床から見た小物体の速度を u とすると

$$u=v+V_0$$

B 点通過以後，床から見て小物体には水平方向に働く力はない。ゆえに，床から見て等速運動するので，C 点から飛び出したときの速度も u である。

C 点から水平投射であるので，床に達するまでの時間 t は

$$h=\frac{1}{2}gt^2\qquad\therefore\quad t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ゆえに，水平到達距離 l は

$$l=ut=(v+V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}}\qquad\cdots(答)$$