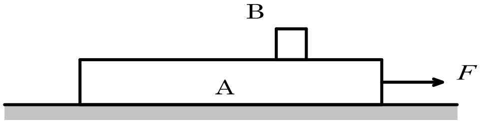
15. 目的:親子亀の基本。摩擦力の向きを正確に考える。

右図のようになめらかな水平面上に，質量 $4m$ の直方体 A があり, A の上面に質量 m の小物体 B を置く。A の上面と B の間の静止摩擦係数は 0.50, 動摩擦係数は 0.30 である。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。ただし，図の右向きを正とする。



A に図のように水平右向きに大きさ F の力を加えたところ, A と B は一体のまま動き出した。

(1)A と B の加速度を求めよ。

(2)A および B に働く水平方向の力をそれぞれ全て図示せよ。力は矢印で表し，また何の力かわかるように語句で記入せよ。

(3)このとき B に働く静止摩擦力の大きさと向きを求めよ。

次に，A に加える力を徐々に大きくし F_0 とすると，B は A に対してすべり始めた。

(4) F_0 を，m，g で表せ。

A と B を静止させた状態から，A に水平右向きに大きさ $3.5mg$ の力を加えた。ただし，$3.5mg > F_0$ である。

(5)A および B に働く水平方向の力をそれぞれ全て図示せよ。力は矢印で表し，また何の力かわかるように語句で記入せよ

(6)A と B の加速度をそれぞれ求めよ。

(7)A から見た B の加速度を求めよ。

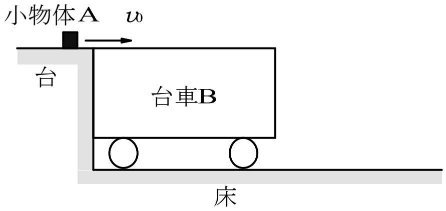
(8)B が A 上で距離 l だけすべる時間を求めよ。ただし，A の上面は十分に長く B は落ちないものとする。

(解答)(1) $\dfrac{F}{5m}$　(2)略　(3) $\dfrac{F}{5}$　(4) $2.5mg$　(5)略　(6)A： $0.80g$　，B： $0.30g$

(7) $-0.50g$　(8) $\sqrt{\dfrac{l}{0.25g}}$

16.目的:相対加速度や仕事について正確な理解を！

右図のように, 速さ v_0 で台を進んできた質量 m の小物体 A が, 質量 M で台と同じ高さの上面を持つ台車 B に乗った。台車 B は水平な床上を動きだし, やがて小物体 A は台車 B に対して静止した。小物体 A と台車 B の上面の間の動摩擦係数を μ', 重力加速度の大きさを g とする。台車 B の上面は十分に長く, 小物体 A が落ちることはないものとする。また, 図の右向きを正とする。



(1)小物体Aが台車 B 上で滑っている間, 小物体 A と台車 B の加速度をそれぞれ求めよ。

(2)台車 B 上で見た小物体 A の加速度を求めよ。

(3)小物体 A が台車 B 上で滑り始めてから静止するまでの時間を求めよ。

(4)小物体 A が台車 B 上で静止したとき, 台車 B の速度を求めよ。

(5)この間, 小物体 A と台車 B で失われた運動エネルギーの合計を求めよ。

(6)小物体 A が台車 B 上で滑り始めてから静止するまでの間, 台車 B が床に対して進んだ距離は L で, 小物体 A が台車 B 上で進んだ距離は l であった。動摩擦力が, 小物体 A と台車 B にする仕事をそれぞれ L, l を用いて表せ。

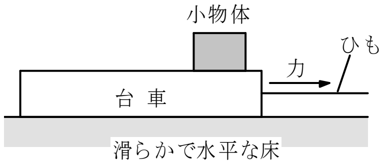
(7)lを求めよ。
(8)(5)で求めた失われた運動エネルギーを，m，μ'，g，lで表せ。

(解答)(1)小物体A: $-\mu' g$ ，台車B: $\dfrac{\mu' mg}{M}$ (2) $-\dfrac{M+m}{M}\mu' g$ (3) $\dfrac{Mv_0}{(M+m)\mu' g}$ (4) $\dfrac{mv_0}{M+m}$

(5) $\dfrac{mMv_0^2}{2(M+m)}$ (6)小物体A: $-\mu' mg(L+l)$ ，台車B: $\mu' mgL$ (7) $\dfrac{Mv_0^2}{2(M+m)\mu' g}$ (8) $\mu' mgl$

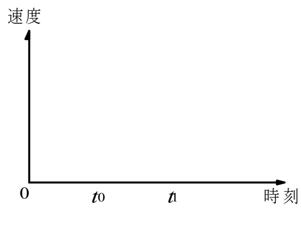
17.目的:親子亀の決定版！

右図のように，滑らかで水平な床に置かれた質量Mの台車の上に，質量mの小物体が置かれている。台車の右端には質量の無視できるひもがつけられている。速度や加速度は図の力の向きのように右向きを正の方向にとるものとする。重力の加速度の大きさをgとし，以下の問いに答えよ。



初めは，台車と小物体の間に摩擦がない場合を考えよう。
(1)台車のひもを水平方向右向きに引き，台車にF_0の力を加えた。台車の床に対する加速度を求めよ。

次に，台車と小物体の間に摩擦がある場合を考えよう。台車と小物体の間の静止摩擦係数をμ_0，動摩擦係数をμ_1とする。
(2)台車のひもを水平方向右向きに引き，台車にF_1の力を加えたところ，小物体は台車の上で滑ることなく，台車と一体となって動いた。
(a) 床に対する台車の加速度を求めよ。
(b)台車に固定した座標で見た場合，小物体は静止している。これは小物体に正と負の2種類の水平方向の力が働いているためと考えられる。これらの力の名称を述べよ。
(3)台車を水平方向右向きに引っ張る力をF_2まで増していったところ，小物体は台車上を滑り始めた。静止摩擦係数μ_0を求めよ。
(4)F_2に比べ充分大きい水平方向右向きの力F_3を，台車に時刻$t = 0$から$t = t_0$まで加えた。ただし台車と小物体は時刻$t = 0$で静止していたとし，以下では速度や加速度は床に固定された座標で考えることにする。また，台車は充分に長く，小物体が台車から落ちることはないものとする。
(a)力F_3が台車に作用している間($0 \leqq t \leqq t_0$)の台車と小物体それぞれの加速度を求めよ。
(b)力F_3が働かなくなる瞬間($t = t_0$)における台車の速度V_0と小物体の速度w_0を求めよ。
(c)力F_3が働かなくなった直後の台車の加速度を求めよ。
(d)$t = t_0$からある時間が経過し時刻t_1になったとき，台車は等速度運動を始めた。等速度運動を始めるまでの時間$t_1 - t_0$，および時刻t_1以降の台車の速度V_1を，V_0とw_0などを用いて表せ。
(e)以上を総合して，台車の速度Vと小物体の速度wが時刻とともに変化するようすの概略を右の図にかき入れよ。



(解答)(1) $\dfrac{F_0}{M}$ (2)(a) $\dfrac{F_1}{M+m}$ (b)正の向き:静止摩擦力 負の向き:慣性力 (3) $\dfrac{F_2}{(M+m)g}$ (4)(a)台車: $\dfrac{F_3-\mu_1 mg}{M}$ ，小物体: $\mu_1 g$ (b) $V_0 = \dfrac{F_3-\mu_1 mg}{M}t_0$

$w_0 = \mu_1 g t_0$ (c) $-\dfrac{\mu_1 mg}{M}$ (d) $V_1 = \dfrac{MV_0 + mw_0}{M+m}$ (e)略

15. (解説)摩擦のある台上での運動は，摩擦力の向きがポイントになる。
静止摩擦力では“もし，摩擦力が無かったらどうなるかを考える。”
動摩擦力では，“台上で見た相対速度と逆向き”と考える。

(1)A と B を一体と考える。加速度を a として

$$(4m+m)a = F \qquad \therefore \qquad a = \frac{F}{5m} \qquad \cdots(答)$$

(2)B は A とともに動くので，B に働く静止摩擦力は右向きである。図 1 となる。

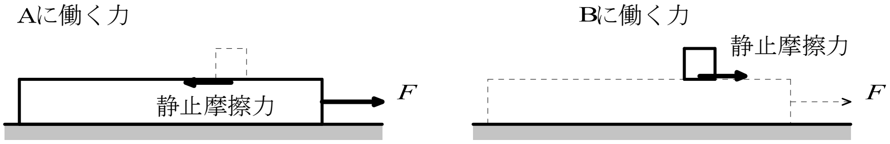


図 1

(3)静止摩擦力の大きさを f として，B の運動方程式をつくる。

$$ma = f$$

(1)の a を代入して

$$f = \frac{F}{5} \quad \cdots ① \qquad \cdots(答)$$

(4)B が A に対してすべり始めるとき，静止摩擦力 f が最大静止摩擦 $0.50mg$ となる。すべり始める直前を考えて①式より

$$0.50mg = \frac{F_0}{5} \qquad \therefore \quad F_0 = 2.5mg \qquad \cdots(答)$$

(5)A，B ともに右向きに動くが，A の速度の方が大きい。ゆえに A 上で見た B の相対速度は左向きであるので，B に働く動摩擦力は右向きである。ゆえに図 2 となる。

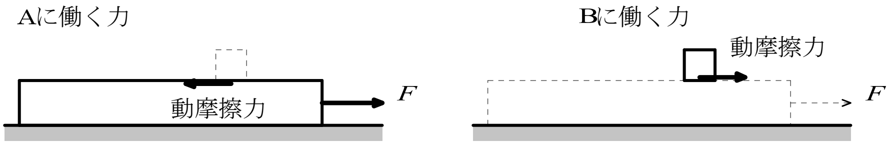


図 2

(6)A，B の加速度をそれぞれ a_A，a_B とすると

A:　$4ma_A = 3.5mg - 0.30mg \qquad \therefore \qquad a_A = 0.80g \qquad \cdots$(答)

B:　$ma_B = 0.30mg \qquad \therefore \qquad a_B = 0.30g \qquad \cdots$(答)

(7)A から見た B の相対加速度 α は

$$\alpha = a_B - a_A = 0.30g - 0.80g = -0.50g \qquad \cdots(答)$$

(8)B は A 上で右向きに l だけすすむ。変位が $-l$ である。時間 t は

$$-l = \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{-2l}{\alpha}} = \sqrt{\frac{l}{0.25g}} \qquad \cdots(答)$$

16. (解説)台車上での小物体の動きは，台車から見た小物体の加速度(相対加速度)を考えると考えやすい。加速度$\overrightarrow{a_A}$で運動する物体を，加速度$\overrightarrow{a_B}$で運動する物体から見たときの相対加速度は$\overrightarrow{a_A}-\overrightarrow{a_B}$　である。

仕事は，(力)×(変位)×cosθである。動摩擦力の仕事も基本に忠実に求めるが，系全体に動摩擦力がする仕事は，差し引き

－(動摩擦力)×(接触面同士の相対変位)

となる。

(1)台車Bから見て小物体Aは図の右向きに進むので，大きさ$\mu' mg$の動摩擦力が小物体Aには左向きに，台車Bには右向きに働く。小物体Aと台車Bの加速度をそれぞれa_A，a_Bとし，運動方程式をつくる。

小物体A:　$ma_A=-\mu' mg$　　∴　$a_A=-\mu' g$　　…(答)

台車B　:　$Ma_B=\mu' mg$　　∴　$a_B=\dfrac{\mu' mg}{M}$　　…(答)

(2)台車Bから見た相対加速度をαとして

$$\alpha=a_A-a_B=-\mu' g-\frac{\mu' mg}{M}=-\frac{M+m}{M}\mu' g \quad \cdots(答)$$

(3)台車Bから見て，小物体の速度はυ_0から0まで変化する。0になるまでの時間をt_1として

$$0=\upsilon_0+\alpha t_1 \quad \therefore \quad t_1=-\frac{\upsilon_0}{\alpha}=\frac{M\upsilon_0}{(M+m)\mu' g} \quad \cdots(答)$$

(4)このときの台車Bの速度をV_1として

$$V_1=a_Bt_1=\frac{\mu' mg}{M}\times\frac{M\upsilon_0}{(M+m)\mu' g}=\frac{m\upsilon_0}{M+m} \quad \cdots(答)$$

(別解)運動量保存則　$m\upsilon_0=(M+m)V_1$　より求める。

(5)全体の運動エネルギーの変化量をΔKとして

$$\Delta K=\frac{1}{2}(M+m)V_1^2-\frac{1}{2}m\upsilon_0^2=-\frac{mM\upsilon_0^2}{2(M+m)}$$

ゆえに，失われたエネルギーは　$|\Delta K|=\dfrac{mM\upsilon_0^2}{2(M+m)}$　…①　…(答)

(6)この間，小物体Aが床に対して進んだ距離は，右向きに$L+l$であるので，小物体Aに動摩擦力がした仕事W_Aは

$W_A=-\mu' mg(L+l)$　…(答)

台車Bに動摩擦力した仕事W_Bは

$W_B=\mu' mgL$　…(答)

(7)相対加速度αを用いる。

$$0^2-\upsilon_0^2=2\alpha l \quad \therefore \quad l=-\frac{\upsilon_0^2}{2\alpha}=\frac{M\upsilon_0^2}{2(M+m)\mu' g} \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

(8)①，②式より

$|\Delta K|=\mu' mgl$

(参考)動摩擦力が小物体Aと台車Bからなる系全体にする仕事Wは

$$W=W_A+W_B=-\mu' mg(L+l)+\mu' mgL=-\mu' mgl$$

された仕事Wだけ，系全体の運動エネルギーが変化することになる。

$$\Delta K=W=-\mu' mgl$$

17. (解説)いわゆる親子亀の問題であるが，まず，力をしっかりと図示して考えること。力の図が書ければ，後は楽である。ポイントは摩擦力の向きになる。あらい面が接触している場合

・接触している面同士の相対速度が 0(一緒に動いている)
→接触面に働くのは静止摩擦，もしくは力が働いていない。静止摩擦の向きは，もし摩擦がなければどんな運動をするか考えよう。

・接触している面同士の相対速度が 0 ではない。
→接触面に働くのは動摩擦。向きは，どちらかの面からの相対速度を考えよう。相対速度と逆向きになる。

(1)台車の加速度を a_0 とする。台車に働く水平方向の力は F_0 のみであるので，運動方程式より

$$Ma_0 = F_0 \qquad \therefore \quad a_0 = \frac{F_0}{M} \qquad \cdots(答)$$

(2)(a)台車と小物体を質量 $M+m$ の一つの物体と考える。加速度を a_1 として

$$(M+m)a_1 = F_1 \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{F_1}{M+m} \qquad \cdots(答)$$

(b)台車は加速度 a_1 で運動している。その上の観測者からは，加速度と逆向きに(負の向き)慣性力が観測される。また，この観測者から見て小物体は静止しているので力はつりあっている。従って正の向きに働く力があるが，それが静止摩擦力である。

正の向き：静止摩擦力　　　負の向き：慣性力

(3)滑り出す直前を考えると，台車と小物体の加速度 a_2 は，$a_2 = \dfrac{F_2}{M+m}$ である。このとき，台車上の観測者から観測すると，最大静止摩擦力 $\mu_0 mg$ と，慣性力 ma_2 がつりあっている。ゆえに

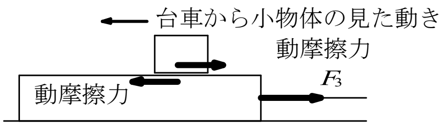
$$\mu_0 mg - ma_2 = 0 \qquad \therefore \quad \mu_0 = \frac{a_2}{g} = \frac{F_2}{(M+m)g} \qquad \cdots(答)$$

(別解)地上から見て，滑り出す直前の台車と小物体，別々に運動方程式をつくる。静止摩擦は小物体には正の向きに，台車には負の向きに働く。

台車：$Ma_2 = F_2 - \mu_0 mg$　　，　　小物体：$ma_2 = \mu_0 mg$

これらの式より，a_2 を消去して，μ_0 を求める。

(4)(a)台車の速度が小物体の速度より大きいので，台車上で見ると小物体は図の左向きに動く。ゆえに小物体に働く動摩擦力は右向き，逆に台車には左向きに働く。大きさは，$\mu_1 mg$ である。台車と小物体の加速度をそれぞれ α, β とし，運動方程式をつくる。



$$台車：M\alpha = F_3 - \mu_1 mg \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} \qquad \cdots(答)$$

$$小物体：m\beta = \mu_1 mg \qquad \therefore \quad \beta = \mu_1 g \qquad \cdots(答)$$

(b)それぞれ等加速度運動をするので

$$V_0 = \alpha t_0 = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} t_0 \quad \cdots(答) \qquad w_0 = \beta t_0 = \mu_1 g t_0 \quad \cdots(答)$$

(c)台車の速度の方が大きいので，動摩擦力の向きは変わらない。台車の加速度を α' として

$$M\alpha' = -\mu_1 mg \qquad \therefore \quad \alpha' = -\frac{\mu_1 mg}{M} \qquad \cdots(答)$$

(d)小物体に働く力は変化せず，加速度は β のままである。時刻 t_1 で同じ速度 V_1 になるので

$$V_1 = V_0 + \alpha'(t_1 - t_0) = w_0 + \beta(t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = \frac{V_0 - w_0}{\beta - \alpha'} = \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M+m)}$$

$$V_1 = \frac{MV_0 + mw_0}{M+m} \qquad \cdots(\text{答})$$

(別解)V_1 は，運動量保存則からも求まる。

(e)速度－時間のグラフの傾きが加速度になる。$\alpha > \beta > 0$,　$\alpha' < 0$ で一定であることを考慮して作図する。小物体の加速度は初めから t_1 まで同じであることにも注意すること。t_1 以後は，両物体は等速運動する。