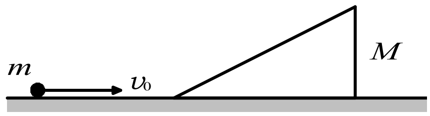
18. 目的:・運動量保存則が成り立つ条件を考える。

・一方向のみ運動量が保存する場合を考える。

図のようになめらかで水平な床の上に，質量 m の小物体と，質量 M のなめらかな斜面を持つ三角台を置く。三角台は床に対して最初静止していた。三角台に向かって小物体を速さ v_0 ですべらせた。小物体は斜面を上り始め，最高点に達した後，斜面をすべり落ち，再び床に達した。重力加速度を g とし，斜面と床が接する点では，小物体はかどの影響を受けずになめらかに通過するものとする。また，初速度の向きを正とする。



(1)最高点に達したときの，床に対する小物体の速度の水平方向成分を求めよ。

(2)最高点での床からの高さを求めよ。

(3)小物体が再び床に達した後の，小物体と三角台の床に対する速度の水平方向成分を求めよ。

(4)この衝突で，小物体に与えた力積の大きさを求めよ。

(5)この衝突の反発係数を求めよ。

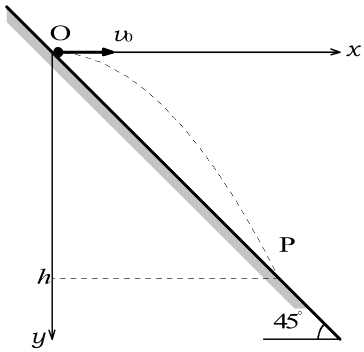
（山口大改）

(解答) (1) $\dfrac{m}{m+M}v_0$　(2) $\dfrac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$　(3)小物体: $\dfrac{m-M}{m+M}v_0$　，三角台: $\dfrac{2m}{M+m}v_0$

(4) $\dfrac{2mM}{m+M}v_0$　(5)　1

19.（・速度の合成，分解に慣れる。・斜め衝突を学ぶ）

右図のような傾角 45° の斜面の一点 O から，質量 m の小球を水平に投げ出した。小球は O から高さ h だけ下の点 P で斜面と衝突した。O を原点とし，図のように水平に x 軸，鉛直下向きに y 軸をとり，小球を投げ出した時刻を $t=0$ とする。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。



(1)点 P で小球が斜面に衝突した時刻を，g，h で表せ。

(2) v_0 を g，h で表せ。

(3)点 P で小球が斜面に衝突する直前の，小球の運動エネルギーを m，g，h で表せ。

(4)点 P で小球が斜面に衝突する直前の，斜面に垂直方向の速さを g，h で表せ。

(5)点 P での衝突のはねかえり係数が $\dfrac{1}{2}$ であったとする。衝突直後の小球の速度の水平成分，鉛直成分を g，h で表せ。

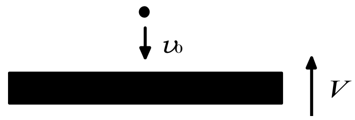
(6)点 P で小球が衝突の際に斜面から受けた力積を m，g，h で表せ。

(解答) (1) $\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$　(2) $\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$　(3) $\dfrac{5}{4}mgh$　(4) $\dfrac{\sqrt{gh}}{2}$

(5)水平：$\dfrac{7}{4}\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$　，鉛直：$\dfrac{5}{4}\sqrt{\dfrac{gh}{2}}$　(6) $\dfrac{3}{4}m\sqrt{gh}$

20.（目的）・一方の速度が変化しない衝突について学ぶ。

・はねかえり係数の意味をしっかり考える。



鉛直上向きの一定の速さ V で動く平板がある。時刻 $t=0$ で，平板の上方から質量 m の小球が，鉛直下向きの速さ v_0 で衝突した。重力加速度の大きさを g とする。平板の質量は小球の質量に比べて十分大きいものとして以下の問に答えよ。

はじめに，小球と板とのはねかえり係数が 1 であるとする。

(1)小球が平板と衝突した直後の速度を求めよ。

(2)衝突の際，小球が受けた力積の大きさを求めよ。

(3)小球が再び平板と衝突するまでの時間，および衝突直前の小球の速度を求めよ。

(4)小球はその後どんな運動をするか考えよ。

次に，はねかえり係数を $e\,(e<1)$ とする。

(5)小球は，平板と衝突をくり返し，いつかはね返らなくなる。はじめに平板と衝突してから，はね返らなくなるまでの時間を求めよ。

(解答)(1)鉛直上向きに速さ v_0+2V　(2) $2m(v_0+V)$　(3) $\dfrac{2(v_0+V)}{g}$，鉛直下向きに速さ v_0

(4) 全体が鉛直上向きに V で動きながら同じ運動を繰り返す。(5) $\dfrac{2e(v_0+V)}{g(1-e)}$

18.（解説）体系の運動量が保存するのは，内力（体系に含まれる物体間の力）のみが働き，外力（体系に含まれない物体から働く力）が働かないときである。この問題で，小物体と三角台からなる体系を考えると，それぞれに働く重力，床からの垂直抗力が外力として働き，またつりあっていないので，運動量は保存しない。しかし，これらの外力は全て鉛直方向に働き，水平方向に働くのは内力である小物体と三角台の間の垂直抗力だけである。ゆえに，体系の水平方向の運動量は保存する。

また，この場合，体系全体の力学的エネルギーも保存する。

(1)最高点に達したとき，三角台から見ると小物体の相対速度は 0，つまり小物体と三角台の速度は等しい。ゆえに，小物体の速度も水平方向であり，この速度を V とする。水平方向の運動量が保存するので

$$mv_0 = (m+M)V \qquad \therefore \quad V = \frac{m}{m+M}v_0 \qquad \cdots(答)$$

(2)最高点の床からの高さを h とすると，体系全体の力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(m+M)V^2 + mgh$$

(1)の V を代入して h を求める。　$h = \dfrac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$　$\cdots$(答)

(3)床に達したときの小物体と三角台の速度をそれぞれ v, V とする(小物体は左右どちら向きの速度を持つかわからない。とりあえず正の向きと考えておく)。水平方向の運動量保存則より

$$mv_0 = mv + MV \qquad \cdots①$$

また，体系全体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \qquad \cdots②$$

①，②式を解くと，

$$v = v_0, \frac{m-M}{m+M}v_0 \qquad V = 0, \frac{2m}{M+m}v_0$$

$v = v_0, V = 0$ の組み合わせは，初めの状態であるので答は，

$$v = \frac{m-M}{m+M}v_0 \quad , \quad V = \frac{2m}{M+m}v_0 \qquad \cdots(答)$$

(4)小物体の運動量変化が与えられた力積である。その大きさは

$$|mv - mv_0| = \left| mv_0\left(\frac{m-M}{m+M} - 1\right)\right| = \frac{2mM}{m+M}v_0 \qquad \cdots(答)$$

（別解）小物体の受けた力積 $= -$(三角台の受けた力積)

$$= -(MV - 0) = -\frac{2mM}{M+m}v_0$$

これの絶対値をとれば，力積の大きさが求まる。

(5)反発係数 e は，衝突前後の相対速度の比である。

$$e = -\frac{v-V}{v_0} = -\frac{\dfrac{m-M}{m+M}v_0 - \dfrac{2m}{m+M}v_0}{v_0} = 1 \qquad \cdots(答)$$

（弾性衝突なので当然である。）

19.(解説)速度の成分を任意の方向に分解したり，結合したり出来るかを問う問題である。図を書いて整理すれば難しくない。

(1)P で $y = h$ である。ゆえに衝突した時刻を t_1 として

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \cdots(答)$$

(2)斜面の傾きは 45° であるので，P 点で $x = h$ である。ゆえに

$$h = v_0 t_1 = v_0\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \therefore \quad v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad \cdots(答)$$

(3)力学的エネルギー保存則より，衝突直前の運動エネルギーK_1は

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = \frac{5}{4}mgh \qquad \cdots(答)$$

(4)衝突直前の速度の x 成分 v_{1x}，y 成分 v_{1y}は

$$v_{1x} = v_0 = \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$v_{1y} = gt_1 = \sqrt{2gh}$$

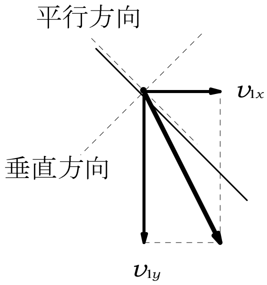


図 1

これより，図 1 を参考に斜面に速度の斜面に垂直な成分の大きさu_1，平行な成分の大きさ w_1を求める。

$$垂直: u_1 = -v_{1x} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + v_{1y} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{gh}}{2} \qquad \cdots(答)$$

$$平行: w_1 = v_{1x} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + v_{1y} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{gh}}{2}$$

(5)面に垂直な成分のみが変化する。はねかえり係数 $\frac{1}{2}$ なので，衝突直後の斜面に垂直な成分を u_2として

$$u_2 = \frac{1}{2}u_1 = \frac{\sqrt{gh}}{4}$$

図2のように垂直な成分の大きさ u_2，平行な成分の大きさ w_2となる。これより，衝突後の速度の x 成分 v_{2x}，y 成分 v_{2y}を求める。

$$v_{2x} = u_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + w_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7}{4}\sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad \cdots(答)$$

$$v_{2y} = -u_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} + w_2 \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{gh}{2}} \qquad \cdots(答)$$

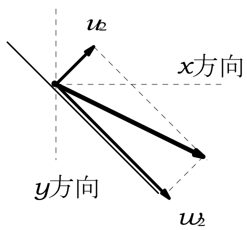


図 2

(6)運動量の変化を求めるが，変化したのは斜面に垂直成分だけである。ゆえに

$$\left|m\left(-u_2 - u_1\right)\right| = \frac{3}{4}m\sqrt{gh} \qquad \cdots(答)$$

20.(解説)衝突の際，一方の物体の質量が十分大きく，速度が変化しないと考えられる場合がある（気体分子と動くピストンの衝突など）。この場合も，はねかえり係数は，衝突前後の相対速度の比として与えられる。

また，この問題の場合，板は等速なので，板から見ても物理法則は同じである(慣性系)であることを利用すると，解きやすい。

(1)鉛直上方を正として，衝突後の小球の速度を v_1 とする。はねかえり係数の式より

$$1=-\frac{v_1-V}{-v_0-V}\qquad \therefore\quad v_1=v_0+2V\qquad \text{鉛直上向きに速さ}\,v_0+2V\quad \cdots(\text{答})$$

(2)小球の受けた力積 I は，小球の運動量変化を求めればよい。

$$I=mv_1-m(-v_0)=2m(v_0+V)\qquad \cdots(\text{答})$$

(3)小球と板が再び同じ高さになるまでの時間を t として，

$$(v_0+2V)t-\frac{1}{2}gt^2=Vt\qquad \therefore\quad t=0,\frac{2(v_0+V)}{g}$$

$t=0$ は，はじめに衝突した時刻で不適。ゆえに，　$\dfrac{2(v_0+V)}{g}$　…(答)

そのときの小球の速度 v_2 は，

$$v_2=(v_0+2V)-gt=-v_0\qquad \text{鉛直下向きに速さ}\,v_0\quad \cdots(\text{答})$$

(4)1 回目の衝突と 2 回目の衝突で，小球と板との相対的な関係は同じである。したがって，全体が鉛直上向きに V で動きながら同じ運動を繰り返す。

(参考)この運動を等速運動する板から見ると，小球が板に対して鉛直下向きの速さ v_0+V で衝突すると考えられる。はねかえり係数が 1 であるので，衝突後，小球は鉛直上向きに速さ v_0+V で鉛直投射されたのと同じである。ゆえに，再び板と衝突するとき，小球は鉛直下向きの速さ v_0+V である。以後，この運動をくり返す。

(5)板から小球の運動を見る。はじめの衝突の直前，小球の板に対する相対速度は鉛直下向き v_0+V で，衝突直後の相対速度は，鉛直上向き $e(v_0+V)$ となる。ゆえに 2 回目に衝突する直前の小球の相対速度は，鉛直下向き $e(v_0+V)$ なので，それまでの時間 t_1 は

$$e(v_0+V)-gt_1=-e(v_0+V)\qquad \therefore\quad t_1=\frac{2e(v_0+V)}{g}$$

2 回目の衝突直後，小球の相対速度は鉛直上向き $e^2(v_0+V)$ となる。同様に考えて，2 回目から 3 回目の衝突までの時間 t_2 は，$t_2=\dfrac{2e^2(v_0+V)}{g}$

以後も同じように考えて，はね上がっている時間の合計 T を考えると，

$$T=t_1+t_2+\square+t_n+\square=\frac{2(v_0+V)}{g}(e+e^2+\square+e^n+\square)$$

$n\to\infty$ とすると，T は収束するので，有限時間内に小球ははね上がらなくなる。等比数列の和を求めて

$$T=\frac{2e(v_0+V)}{g(1-e)}\qquad \cdots(\text{答})$$