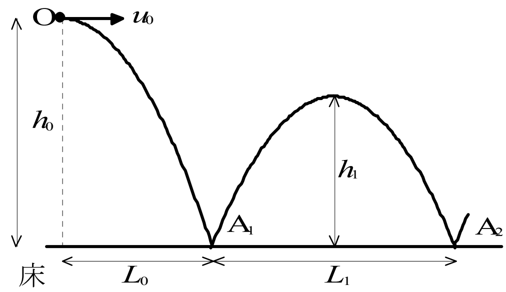
21．目的:・斜め衝突を復習する。

床から高さ h_0 の点 O より，質量 m の小物体を水平に速さ u_0 で投げ出す。小球と床との衝突の際，摩擦力は働かず，はねかえり係数を $e(<1)$ とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。



(1)小球を投げてから初めて床に衝突する点を A_1 とする。O から A_1 までの時間 t_0，点 O の真下の点から A_1 までの距離 L_0 を求めよ。

(2) A_1 ではね返った直後の小球の速さを求めよ。

(3) A_1 での衝突の前後で，小球が失ったエネルギーを求めよ。

(4) A_1 ではね返った後，最も高くなる点の床からの高さ h_1 を求めよ。

(5)次に床に衝突する点を A_2 とする。A_1 から A_2 までの時間 t_1，距離 L_1 を求めよ。

小球は床と衝突をくり返し，やがてはね上がらなくなる。

(6)はね上がらなくなった後，小球はどのような運動をするか答えよ。

(7)小球がはね上がらなくなるまでの時間 T，また，はね上がらなくなる点の，点 O の真下の点からの距離 L を求めよ。

(8)小球を投げてから，はね上がらなくなるまで，小球が失ったエネルギーの大きさを求めよ。

(解答)(1) $t_0=\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$，$L=u_0\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$　(2) $\sqrt{u_0^2+2e^2gh_0}$　(3) $(1-e^2)mgh_0$　(4) $h_1=e^2h_0$

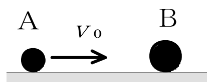
(5) $t_1=2e\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$，$L_1=2eu_0\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$　(6) 速さ u_0 で，　床上を等速直線運動する。

(7) $T=\dfrac{1+e}{1-e}\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$，$L=\dfrac{(1+e)u_0}{1-e}\sqrt{\dfrac{2h_0}{g}}$　(8) mgh_0

22.目的:重心の速度を求める。重心の性質について学ぶ。

(重心の運動)

右の図のように，なめらかな水平面上に質量がそれぞれ m，$2m$ の物体 A，B がある。物体Aは速さ v_0 で右向きに動き，B と衝突する。はねかえり係数を $\dfrac{1}{3}$ とする。A，B の運動は一直線上に限定される。



(1)衝突前，A，B からなる体系の重心の速度を求めよ。

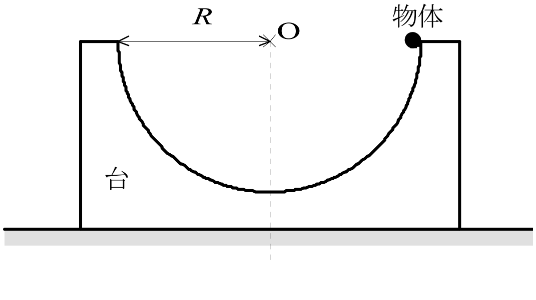
(2)衝突後，A，B の速度を求めよ。

(3)衝突後，A，B からなる体系の重心の速度を求め，衝突前と変化しないことを確かめよ。

(解答)(1) $\dfrac{v_0}{3}$　(2)A: $\dfrac{v_0}{9}$，B: $\dfrac{4v_0}{9}$　(3) $\dfrac{v_0}{3}$

23．目的:重心の動きについて考える。

図のようになめらかな水平面上に、点Oを中心とする半径 R のなめらかな半球面をもつ質量 $3m$ の台が置かれている。台の形状はOを通る鉛直線に対して対称であり，一様な材質の物質で出来ている。質量 m の小物体を、半球面の端に置き、静かに放す。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。



(1)小物体が半球面の最下点を通過するときの、小物体および台の速度を求めよ。

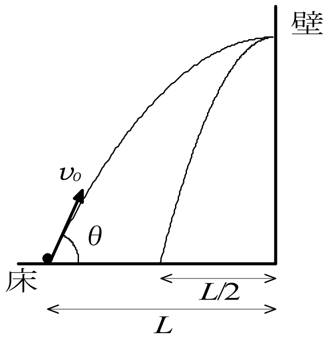
(2)このとき台ははじめの位置からどちらにどれだけずれているか求めよ。
(3)小物体は最下点を通過後、半球面の反対の端に到達した。このときの、小物体および台の速度を求めよ。
(4)このとき台ははじめの位置からどちらにどれだけずれているか求めよ。

(解答)(1)小球: $\sqrt{\dfrac{3gR}{2}}$ (水平左向き) , 台: $\sqrt{\dfrac{gR}{6}}$ (水平右向き) (2) $\dfrac{R}{4}$ 右方向 (3)0

(4) $\dfrac{R}{2}$ 右方向

24. 目的:思考力を問う問題。斜め衝突, 放物運動の特徴を考える。

以下の文中の[ア]〜[シ]に適当な式, 数値を答えなさい。また, 下線部の問いに答えなさい。



鉛直な壁から距離 L だけ離れた水平な床の一点より, 小球を速さ v_0, 水平からの角 θ で投げた。小球は壁に対して直角に衝突し, 壁から距離 $\dfrac{L}{2}$ の床に落下した。衝突の際, 小球と壁との間に摩擦力は働かず, 重力加速度の大きさを g とする。

小球を投げてから壁と衝突するまでの時間を T とすると, L, v_0, θ を用いて $T=$[ア]となる。また, 壁の衝突した点の床からの高さは v_0, θ, g を用いて[イ]となる。小球と壁とのはねかえり係数を e とすると, 衝突後の速度の水平成分の大きさは[ウ]となり, $\dfrac{L}{2}=$【 ウ 】×[エ]より, $e=$[オ]である。

次に, 投げる位置だけを変えて小球を投げ, 壁に衝突後に投げた地点に戻ってくるようにしたい。このとき, 投げた地点の壁からの距離を L' を求めよう。

問. 投げてから床に戻ってくるまで, 小球の軌跡の概略を書いてみよ。

投げてから戻ってくるまでの間の小球の最高点の高さは v_0, θ, g を用いて[カ]である。小球を投げてから壁に衝突するまでの時間を t_1, 壁に衝突してから床に戻ってくるまでの時間を t_2 とすると, v_0, θ, e を用いて,

$L' =$ [キ]$\times t_1 =$[ク]$\times t_2$

また, $t_1 + t_2 =$[ケ](T を用いて)である。これらより, $e=$【 オ 】を代入して, t_1 を T を用いて表すと, $t_1=$[コ]× T となる。また, $T=$【 ア 】を代入して, L' を L を用いて表すと

$L' =$[サ]$\times L$

となる。また, 小球の最高点は壁からの水平距離で[シ]× L だけ離れた点となる。

(解答)ア. $\dfrac{L}{v_0\cos\theta}$ イ. $\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$ ウ. $ev_0\cos\theta$ エ. T オ. $\dfrac{1}{2}$ 問. 略

カ. $\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$ キ. $v_0\cos\theta$ ク. $ev_0\cos\theta$ ケ. $2T$ コ. $\dfrac{2}{3}$ サ. $\dfrac{2}{3}$ シ. $\dfrac{1}{6}$

21．(解説)床や壁などと斜めに衝突する際，一般に壁や床（衝突面）に対して垂直な方向の力のみが働くので速度の壁，床に垂直成分のみが変化し，平行な成分は変化しない。壁や床が動かない場合は，はねかえり係数 e として，速度の垂直成分が e 倍になるだけである。

$e<1$ の場合，繰り返し衝突するとエネルギーを失い，いずれはね返らなくなる。

(1)水平投射であるので

$$h_0=\frac{1}{2}gt_0^2 \qquad \therefore \quad t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

$$L=u_0t_0=u_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

(2)A_1 で衝突直前の速度の鉛直成分を v_0，衝突直後を v_1 とする。

$$v_0^2=2gh_0 \qquad \therefore \quad v_0=\sqrt{2gh_0}$$

衝突後，衝突面（床）に垂直成分の大きさが e 倍になる。ゆえに

$$v_1=ev_0=e\sqrt{2gh_0}$$

衝突直後の速さは

$$\sqrt{u_0^2+v_1^2}=\sqrt{u_0^2+2e^2gh_0} \quad \cdots(答)$$

(3)衝突前後でエネルギーの変化量 ΔE は

$$\Delta E=\frac{1}{2}m(u_0^2+v_1^2)-\frac{1}{2}m(u_0^2+v_0^2)=-(1-e^2)mgh_0$$

失ったエネルギーは，　$(1-e^2)mgh_0$　$\cdots$(答)

(4)床との衝突後，小球は放物運動をする。鉛直方向を考えて

$$0-v_1^2=-2gh_1 \qquad \therefore \quad h_1=\frac{v_1^2}{2g}=e^2h_0 \quad \cdots(答)$$

(5)　$v_1t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=0$　より，　$t_1=0,\frac{2v_1}{g}$

$t_1=0$ は不適であるので，　$t_1=\frac{2v_1}{g}=2e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$　$\cdots$(答)

$$L_1=u_0t_1=2eu_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

(6)床との衝突のたびに鉛直方向の速度は変化し，やがて 0 になるが，水平方向の速度は変化しない。ゆえに

速さ u_0 で，床上を等速直線運動する。 $\cdots$(答)

(7)A_2 で衝突してから次に衝突するまでの時間 t_2 は，　$t_2=2e^2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

同様に，n 回目の衝突から，$n+1$ 回目の衝突までの時間 t_n は

$$t_n=2e^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

はじめからの合計時間は，

$$t_0+t_1+t_2+\square+t_n\square=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2e^2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+\square+2e^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+\square$$

$$=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left\{1+2(e+e^2+\square e^n+\square)\right\}$$

$e < 1$ であるのでこの数列は収束する。ゆえに，有限時間内に小球ははね返らなくなる。それまでの時間 T は，

$$T = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left\{1+2(e+e^2+\square+e^n+\square\right\} = \sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1+\frac{2e}{1-e}\right) = \frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(\text{答})$$

水平方向の速さは u_0 で一定であるので，

$$L = u_0 T = \frac{(1+e)u_0}{1-e}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(\text{答})$$

(8)投げ出したときの力学的エネルギーは $\frac{1}{2}mu_0^2 + mgh_0$ で，はね上がらなくなったときの力学的エネルギーは，$\frac{1}{2}mu_0^2$ であるので，失ったエネルギーは，mgh_0 $\cdots$(答)

22. (解説)質量 m_A，m_B の物体 A, B からなる体系の重心の位置 x_G は，A, B の位置を x_A，x_B として

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

である。位置の時間変化が速度であるので，重心の速度 V_G は，A, B の速度を V_A，V_B として，

$$V_G = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B} \quad (\text{位置を時間で微分するということである。})$$

体系外から力が働かないとき（内力のみの時），運動量が保存する（変化しない）ので上式より重心の速度は変化しない。まとめると，

内力のみが働くとき（体系の運動量が保存するとき），体系の重心の速度は変化しない。

つまり，初めに重心が静止していれば静止したまま。動いていれば，重心は等速直線運動をする。

(1)重心の速度 v_G は，

$$v_G = \frac{mv_0 + 0}{m + 2m} = \frac{v_0}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

(2)衝突後のA，Bの速度をそれぞれ v_A，v_B とする。図の右向きを正として，

運動量保存則より　$mv_0 = mv_A + 2v_B$

反発係数は $\frac{1}{3}$ であるので，　$\frac{1}{3} = -\frac{v_A - v_B}{v_0}$

これらを解いて，　$v_A = \frac{v_0}{9}$　，　$v_B = \frac{4}{9}v_0$　$\cdots$(答)

(3)重心の速度は

$$v_G = \frac{m\times\frac{v_0}{9} + 2m\times\frac{4v_0}{9}}{m + 2m} = \frac{v_0}{3} \quad \cdots(\text{答})$$

となり，衝突前と変化していない。

23. (解説)小物体と台からなる体系を考えると，水平方向に成分を持つ力は台と小球間の垂直抗力だけである。これは内力であるので，体系の運動量の水平方向の成分は保存する。また，はじめ体系の重心は静止しているので，重心の水平方向の位置は移動しない。

(1)最下点を通過するときの，小物体と台の速さをそれぞれ υ, Vとする。最下点まで台は小物体から右向きの力を受けるので，台は右向きの速度を持つ。また，体系の水平方向の運動量が 0 であるので，小物体の速度は左向きである。右向きを正として運動量保存則より

$$0 = -m\upsilon + 3mV$$

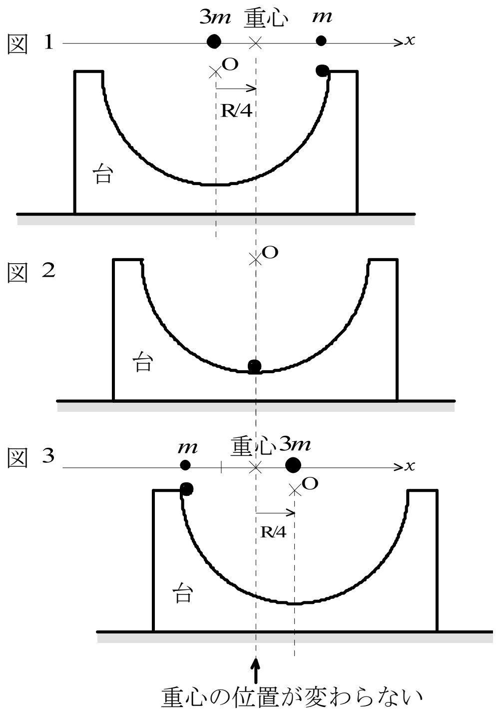
体系全体の力学的エネルギー保存則より，

$$mgR = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \frac{1}{2}\cdot 3mV^2$$

これら2式を解いて

$$\upsilon = \sqrt{\frac{3gR}{2}}\ (\text{水平左向き})$$

$$V = \sqrt{\frac{gR}{6}}\ (\text{水平右向き})\qquad \cdots(\text{答})$$



(2)はじめの状態で O を原点に水平右向きに床に固定した x 軸をとる。台の重心の水平位置は台の中央(O を通る鉛直線上)である体系の重心の水平の位置 x_G は

$$x_G = \frac{mR}{m+3m} = \frac{R}{4}\qquad (\text{図 1})$$

はじめ，台も小物体も静止しているので体系の重心も静止している。水平方向の運動量が保存するので，体系の重心の速度の水平成分は 0 のまま，つまり重心の水平の位置は変わらない。

小物体が最下点に来たときの，点 O の水平座標を x(台の移動量)とする。小物体の位置も x である。体系の重心求め，重心が静止していることを利用して(図 2)

$$x_G = \frac{R}{4} = \frac{(m+3m)x}{m+3m}\qquad \therefore\quad x = \frac{R}{4}$$

ゆえに移動距離は $|x| = \dfrac{R}{4}$

向きは，右方向　…(答)

(3)力学的エネルギー保存則より，小物体の高さが R のとき，小物体と台の運動エネルギーの和は 0，ゆえに速度も 0 である。

(4)点 O の水平座標を x' とすると，小球の位置は $x'-R$ である。(2)と同様に

$$x_G = \frac{m(x'-R)+3mx'}{m+3m} = \frac{R}{4}\qquad \therefore\quad x' = \frac{R}{2}$$

ゆえに移動距離は $|x'| = \dfrac{R}{2}$　　…(答)

図 3 のように，はじめから体系の重心の位置は移動していない。

24.(解説)壁との衝突では，速度の壁に垂直な成分(水平成分)のみが変化し，壁に平行な成分(鉛直成分)は変化しない。鉛直方向の運動だけを考えると，壁との衝突で影響を受けないで，単なる鉛直投射である。このことを頭に置いてどんな運動をするか考える。

(解答)速度の水平成分は $\upsilon_0\cos\theta$ で，壁と衝突するまで等速運動であるので，

$$T=\frac{L}{v_0\cos\theta}\quad\cdots①\quad\cdots(ア)$$

壁と垂直に衝突するので，このとき小球は最高点である。高さを h_0 とすると，鉛直方向の速度が 0 であるので

$$0-(v_0\sin\theta)^2=-2gh_0\qquad\therefore\quad h_0=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\quad\cdots(イ)$$

衝突後の速度の水平成分は e 倍になるので　　$ev_0\cos\theta$　$\cdots$(ウ)

放物運動の頂点で壁と衝突しているので，床に落下するまでの時間は T である。

$$T\left(=\frac{L}{v_0\cos\theta}\right)\quad\cdots(エ)$$

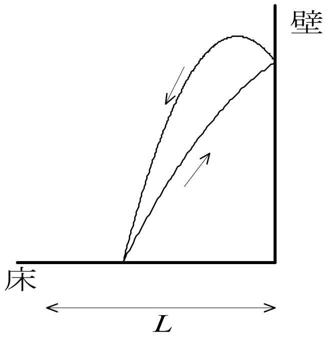
水平方向の運動を考えて　　$\frac{L}{2}=ev_0\cos\theta\times T$　$\cdots$②

①，②式より

$$\frac{L}{2}=ev_0\cos\theta\times\frac{L}{v_0\cos\theta}\qquad\therefore\quad e=\frac{1}{2}\quad\cdots(オ)$$

問．壁と衝突すると，速度の水平成分が $\frac{1}{2}$ 倍になる。ゆえに，元の地点に落下するためには，衝突後，床に落下するまでの時間は壁と衝突するまでの時間の 2 倍になる必要がある。鉛直方向の運動は壁との衝突で影響を受けないので、投げてから落下するまでの時間の $\frac{1}{3}$ で衝突する必要がある。

ゆえに，最高点に達する前に壁と衝突し，その後，最高点に達し床に落下する。（右図）



鉛直方向の動きは壁との衝突で影響を受けないので，最高点の高さは h_0 で変わりない。

$$h_0=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\quad\cdots(カ)$$

衝突前後の速度の水平成分はそれぞれ，$v_0\cos\theta$，$ev_0\cos\theta$ である。

壁までの水平距離を L' と，壁に衝突するまでの時間を t_1，衝突後，落下までの時間を t_2 として

$$L'=v_0\cos\theta\times t_1=ev_0\cos\theta\times t_2\quad\cdots③$$ $v_0\cos\theta$　（キ），$ev_0\cos\theta$　（ク）

床に落下するまでの時間は $2T$ である。

$$t_1+t_2=2T\quad\cdots④$$　　$2T\cdots$（ケ）

③，④式で $e=\frac{1}{2}$ として，t_1，t_2 を求めると，

$$t_1=\frac{2T}{3}$$　（コ）$\frac{2}{3}$　　また，$t_2=\frac{4T}{3}$

ゆえに，L' は，

$$L'=v_0\cos\theta\times\frac{2}{3}T=v_0\cos\theta\times\frac{2L}{3v_0\cos\theta}=\frac{2}{3}L$$　（サ）$\frac{2}{3}$

投げてから最高点までの時間は T であるので，壁と衝突後，時間　$T-\frac{2}{3}T=\frac{T}{3}$ で最高点となる。

衝突後の速度の水平成分は，$ev_0\cos\theta=\frac{1}{2}v_0\cos\theta$　なので，最高点の壁からの水平距離は

$$\frac{1}{2}v_0\cos\theta\times\frac{T}{3}=\frac{1}{2}v_0\cos\theta\times\frac{L}{3v_0\cos\theta}=\frac{L}{6}$$　（シ）$\frac{1}{6}$