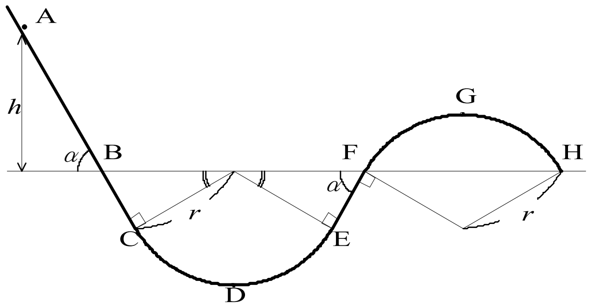
25. 目的:鉛直面内の円運動。垂直抗力の推定をする。

図のように，直線と半径 $r$ の円弧とからなる軌道を考える。円弧は点 C，E，F で軌道の直線部分と滑らかにつながっている。初速度 0 で点 A から質量 $m$ の球が斜面に沿ってすべり落ちるとき，球は軌道に沿って摩擦なしで運動する。点 B，F，H は水平線上にあり，直線部分 AB は水平線と角度 $\alpha$ をなす。重力加速度を $g$ とし，球の半径は十分小さいとする。




(1)この球が軌道から受ける最大の抗力を求めよ。

(2)出発点 A での球の高さ $h$ がある値 $h_0$ をこえると，球が運動の途中で軌道から浮き上がる。$h_0$ を求めよ。

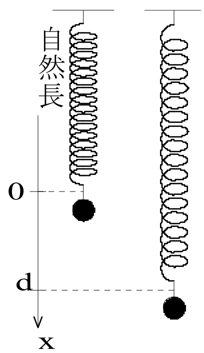
(3)$h > h_0$ のとき，球が軌道から飛び上がり，点 H に落下した。このときの $h$ の値を求めよ。

(4)高さ $h$ を適当に選んで，球が軌道から浮き上がらずに点 G に到達するためには，角度 $\alpha$ がある条件を満たすことが必要である。この条件を求めよ。（東京大）

(解説) (1) $\dfrac{mg(3r+2h)}{r}$　(2) $\dfrac{1}{2}r\cos\alpha$　(3) $\dfrac{r}{2\cos\alpha}$　(4) $\cos\alpha \geqq \dfrac{2}{3}$

26. 目的: $f=-kx$ とならない場合の単振動について学ぶ。

右の図のように，ばね定数 $k$ のばねに，質量 $m$ のおもりがつり下げられ，ばねの他端は天井に固定されている。ばねが自然長のときのおもりの位置を原点 O として，鉛直下向きに $x$ 軸をとる。




おもりを鉛直下方向に $x = d$ の点まで引き下げ，静かにはなすと，おもりは鉛直上向きに動き出した。重力加速度の大きさを $g$ として，以下の問に答えよ。

(1)おもりの位置が $x$ のとき，おもりの加速度を $a$ として運動方程式をつくれ。

(2)この単振動の中心の位置，角振動数，振幅を求めよ。

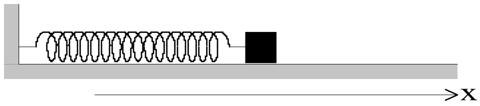
(3)おもりの速さの最大値を求めよ。

(4)おもりをはなした時刻を $t = 0$ とし，時刻 $t$ のときのおもりの位置 $x$，速度 $v$ を求めよ。

(解答) (1) $ma = -kx + mg$　(2)位置 $\dfrac{mg}{k}$ ，角振動数 $\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ ，振幅 $d - \dfrac{mg}{k}$

(3) $\left(d - \dfrac{mg}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　(4) $x = \dfrac{mg}{k} + \left(d - \dfrac{mg}{k}\right)\cos\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$ ，$v = -\left(d - \dfrac{mg}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}\sin\sqrt{\dfrac{k}{m}}t$

27. 目的: $f=-kx$ とならない場合の単振動のさらに応用。減衰振動について学ぶ。




右の図のように，水平な床に一端を壁に固定され，他端に質量 $m$ の物体をつけた，ばね定数 $k$ のばねが置かれている。床と物体との間の静止摩擦係数を $\mu$，動摩擦係数を $\frac{4}{5}\mu$ とする。ばねが自然長のときの物体の位置を原点とし，水平右向きに $x$ 軸をとる。重力加速度の大きさを $g$ とする。

(1)物体を引いてばねを伸ばし，静かに物体をはなしたところ，物体は床に静止したままであった。このように物体をはなしても動かない範囲で，ばねの伸びの最大値を $d$ とする。$d$ を求めよ。

つぎに，物体を $x=5d$ の位置まで引いて静かにはなしたところ，物体は動き出した。動き出してからはじめて止まるまでの間について，以下の問に答えよ。

(2)物体の位置が $x$ のとき，物体の加速度を $a$ として運動方程式を求めよ。

(3)この単振動の中心の $x$ 座標と振幅を，$d$ を用いて求めよ。

(4)動き出した時刻を $t=0$ として，物体が初めて止まる時刻を求めよ。またそのときの位置を，$d$ を用いて求めよ。

物体は一度止まった後，再び動きだした。

(5)この単振動の中心の $x$ 座標と振幅を，$d$ を用いて求めよ。

(6)物体が 2 回目に止まるとき位置を，$d$ を用いて求めよ。

物体はいずれ静止して動かなくなる。

(7)物体が動かなくなった位置の $x$ 座標を求めよ。

(解答) (1) $d=\frac{\mu mg}{k}$ (2) $ma=-kx+\frac{4}{5}\mu mg$ (3)中心 $\frac{4}{5}d$ ，振幅 $\frac{21}{5}d$

(4)時刻 $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ，位置 $-\frac{17}{5}d$ (5)位置 $-\frac{4}{5}d$ ，振幅 $\frac{13}{5}d$ (6) $\frac{9}{5}d$ (7) $-\frac{d}{5}$

25. (解説)鉛直面内の円運動なので，円の半径方向に遠心力を含んだつりあいを考えれば解けるのだが，垂直抗力が最大，最小になる位置を見抜くことが必要である。

図1のような場合，半径方向のつりあいより垂直抗力 $N$ は

$$N = mg\cos\theta + \frac{mv^2}{r}$$

となり，$\theta$ が小さいほど，また $v$ が大きいほど $N$ は大きい。ゆえに垂直抗力が最大になるのは点 D である。また $N>0$ なので，この状況で球が浮き上がることはない。

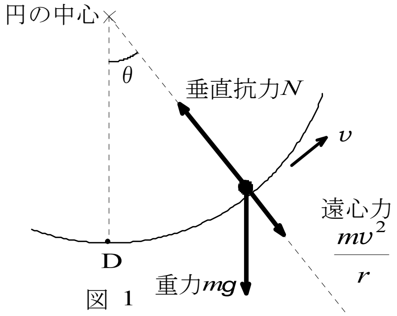


図 1

図 2 のような場合，半径方向のつりあいより垂直抗力 $N$ は

$$N = mg\cos\theta - \frac{mv^2}{r}$$

となり，$\theta$ が大きいほど，また $v$ が大きいほど $N$ は小さい。ゆえに垂直抗力が最小になるのは点 F であり，もし球が浮き上がるとすれば点 F しかない。

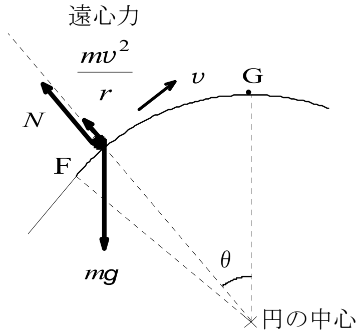


図 2

(1)点 D で最大となる。点 D での球の速さを $v_D$ として，力学的エネルギー保存則より

$$mg(h+r) = \frac{1}{2}mv_D^2 \qquad \cdots①$$

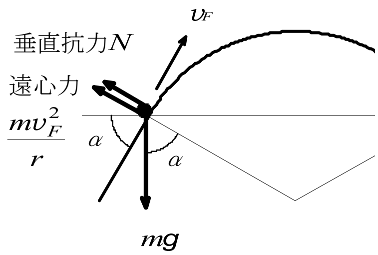
垂直抗力の大きさを $N_D$ として，円の中心方向(鉛直方向)に，遠心力を含んだつりあいより

$$N - mg - \frac{mv_D^2}{r} = 0 \qquad \cdots②$$

①，②式より

$$N = mg + \frac{mv_D^2}{r} = \frac{mg(3r+2h)}{r} \qquad \cdots(答)$$

(2) 点 F で垂直抗力が最小であるので，点 F で垂直抗力が 0 のとき，浮き上がる。点 F での球の速さを $v_F$ として，力学的エネルギー保存則より




$$mgh = \frac{1}{2}mv_F^2 \qquad \cdots③$$

垂直抗力の大きさを $N$ として，円の中心方向に，遠心力を含んだつりあいより

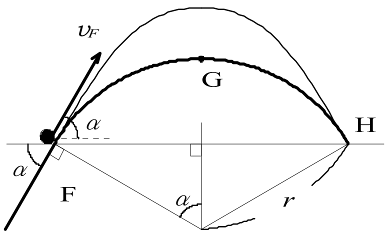
$$N - mg\cos\alpha + \frac{mv_F^2}{r} = 0 \qquad \cdots④$$

③，④式より　$N = mg\cos\alpha - \dfrac{mv_F^2}{r} = mg\left(\cos\alpha - \dfrac{2h}{r}\right)$

$N=0$ で浮き上がるので，このときの $h$ が $h_0$ である。

$$mg\left(\cos\alpha - \frac{2h_0}{r}\right) = 0 \qquad \therefore \quad h_0 = \frac{1}{2}r\cos\alpha \qquad \cdots⑤\cdots(答)$$

(3)点 F で初速度 $v_F$，水平から角 $\alpha$ で斜方投射となる。③式より




$$v_F=\sqrt{2gh}$$

点 H に落下するまでの時間 $t$ は

$$v_F\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=\sqrt{2gh}\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=0$$

$$\therefore\quad t=\frac{2\sqrt{2gh}\sin\alpha}{g}$$

FH 間の水平距離は $2r\sin\alpha$ であるので

$$2r\sin\alpha=v_F\cos\alpha\cdot t=\sqrt{2gh}\cos\alpha\times\frac{2\sqrt{2gh}\sin\alpha}{g}\qquad\therefore\quad h=\frac{r}{2\cos\alpha}\qquad\cdots(答)$$

(4)次の二つの条件を満たす必要がある。

（ⅰ)点 F で面から離れない。

（ⅱ)点 G まで到達する。

（ⅰ)点 F で面から離れない条件は，$h$ が(2)の $h_0$ 以下である。すなわち

$$h\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha$$

（ⅱ)点 G まで到達するためには，力学的エネルギーを考えて

$$mgh\geqq mgr(1-\cos\alpha)\qquad\therefore\quad h\geqq r(1-\cos\alpha)$$

以上，2つの条件を満たさなければならないので

$$r(1-\cos\alpha)\leqq h\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha$$

$$\therefore\quad r(1-\cos\alpha)\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha\qquad\qquad\cos\alpha\geqq\frac{2}{3}\qquad\cdots(答)$$

（点Gまで到達するためには点Aは点Gより高い必要ある。$\cos\alpha<\dfrac{2}{3}$ であると，仮にAとGが同じ高さだとしても，点Fで面から離れてしまう。）

26.(解説)位置座標 $x$ にある物体に働く力の合力 $f$ が，$K$, $B$ を定数として，$f=-Kx+B$ となる場合も単振動である。単振動の中心では $f=0$ であるので，$x=\dfrac{B}{K}$ の点が中心となる。この点を原点に座標 $x'$ をとりなおすと，物体に働く力は $f=-Kx'$ となる。( $x=x'+\dfrac{B}{K}$ である。)

ゆえに，この単振動の角振動数 ω，周期 $T$ は，物体の質量を $m$ として，

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

同じことだが，$C$, $D$ を定数として加速度 $a$ が　$a=-Cx+D$　となる場合も単振動である。

$\omega=\sqrt{C}$　である。

(1)ばねの伸びが $x$ であるので　$ma=-kx+mg$　…(答)

(2)中心の座標 $x_0$ とすると，　$-kx_0+mg=0$　∴　$x_0=\dfrac{mg}{k}$　…①　…(答)

また，角振動数 ω は，　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　…(答)

振幅 $A$ は，中心から端までの距離なので，　$A=d-x_0=d-\dfrac{mg}{k}$　…(答)

(静かにはなすと鉛直上向きに動き出したので，　$d>x_0$)

(3)速さが最大値 $v_0$ になるのは，中心を通過するときである。力学的エネルギー保存則より

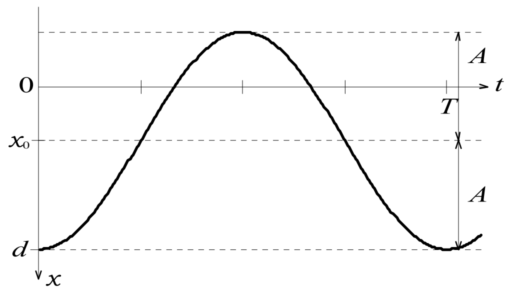
$$-mgd+\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}mv_0^2-mgx_0+\frac{1}{2}kx_0^2$$

①式も用いてこれを解けばよい。　$v_0=\left(d-\dfrac{mg}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　…(答)

(別解)速さの最大値＝振幅×角振動数

(別解)単振動のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$




(4)おもりは，$x_0$ を中心に，$t=0$ で $x$ が最大のところ(単振動の下端)から運動するので，変位と時間の関係は下図となる。ただし，$x$ 軸の正方向を下向きにとっていることに注意すること。

これを式にすると

$$x=x_0+A\cos\omega t=\frac{mg}{k}+\left(d-\frac{mg}{k}\right)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \cdots(答)$$

速度 $v$ は，$t=0$ で $v=0$ で，その後，$x$ 軸負の方向に動き出すので

$$v=-v_0\sin\omega t=-\left(d-\frac{mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \quad \cdots(答)$$

(別解)$x$ から $v$ を求めるのには，$x$ を時間 $t$ で微分すればよい。

27. (解説)摩擦のある水平面上のばねによる単振動では、動摩擦力により中心が自然長の位置よりずれる。摩擦力の向きが逆転すれば，中心も変わり，次第に振幅が小さくなり，いずれ静止する。このような振動を減衰振動と呼ぶ。

(1)ばねの弾性力が，最大静止摩擦力以下であればよいので，のび $x$ の満たす条件は

$kx\leqq\mu mg$　∴　$x\leqq\dfrac{\mu mg}{k}$　ゆえに最大値 $d$ は　$d=\dfrac{\mu mg}{k}$　…(答)

(2)物体が $x$ 負の方向に動くとき，動摩擦力は正方向に働く。運動方程式は

$$ma = -kx + \frac{4}{5}\mu mg \qquad \cdots(答) \qquad （単振動である）$$

(3)中心の座標 $x_0$ は，$a = 0$ となる位置であるので

$$0 = -kx_0 + \frac{4}{5}\mu mg \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{4\mu mg}{5k} = \frac{4}{5}d \qquad \cdots(答)$$

単振動の正方向の端（右端）は，$x = 5d$ であるので，振幅 $A_1$ は $A_1 = 5d - \frac{4}{5}d = \frac{21}{5}d$ …(答)

(4)単振動の右端から左端までなので $\frac{1}{2}$ 周期である。この単振動の周期 $T$ は，$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であるので，初めて静止する時刻 $t_1$ は

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \cdots(答)$$

そのときの位置 $x_1$ は，単振動の負方向の端（左端）なので

$$x_1 = 5d - 2A_1 = -\frac{17}{5}d \qquad \cdots(答)$$

(5) $x$ 正の方向に動くとき，動摩擦力は負方向に働く。運動方程式は

$$ma = -kx - \frac{4}{5}\mu mg$$

この単振動の中心の座標 $x'_0$ は

$$0 = -kx'_0 - \frac{4}{5}\mu mg \qquad \therefore \quad x'_0 = -\frac{4\mu mg}{5k} = -\frac{4}{5}d \qquad \cdots(答)$$

単振動の負方向の端（左端）が $x_1$ であるので，振幅 $A_2$ は

$$A_2 = x'_0 - x_1 = -\frac{4}{5}d - \left(-\frac{17}{5}d\right) = \frac{13}{5}d \qquad \cdots(答)$$

(6)単振動の正方向の端（右端）なので，位置 $x_2$ は

$$x_2 = x_1 + 2A_2 = -\frac{17}{5}d + 2\times\frac{13}{5}d = \frac{9}{5}d$$

(7)(1)より静止した位置の座標 $x$ が，$-d \leqq x \leqq d$ の範囲であるとき，動き出さない。

位置 $x_2$ から動き出す。$x$ 負方向に動くとき中心の座標は $x_0$ であるので，振幅 $A_3$ は

$$A_3 = \frac{9}{5}d - \frac{4}{5}d = d$$

ゆえに次に静止する位置 $x_3$ は $x_3 = x_2 - 2A_3 = \frac{9}{5}d - 2\times d = -\frac{d}{5}$

条件を満たすので，静止摩擦により動かない。ゆえに，$-\frac{d}{5}$ …(答)

(参考)この動きを図，及びグラフにすると下図になる。