28. 目的：単振動のエネルギーについて学ぶ

ばね定数 k のばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m のおもりをつるしたところ，自然長より x_0 だけ伸びてつりあった。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

(1) x_0 を k，m，g で表せ。

つりあいの位置を原点 O として鉛直下向きに x 軸をとる。おもりを原点（つりあいの位置）から鉛直下方に $2x_0$ だけ引き下げて静かに放す。

(2)おもりの位置が x のとき，おもりに働く合力を k，x で表せ。

(3)おもりの位置が x のときの位置エネルギーの，原点 O での位置エネルギーからの差を k，x で表せ。

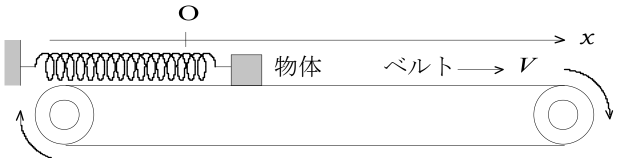
(4)おもりが $x = x_0$ を通過するときの速さを k，m，x_0 で表せ。

(5)おもりが原点を通過するときの速さを k，m，x_0 で表せ。

（解答）(1) $x_0 = \dfrac{mg}{k}$　(2) $-kx$　(3) $\dfrac{1}{2}kx^2$　(4) $x_0\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$　(5) $2x_0\sqrt{\dfrac{k}{m}}$

29. 目的：単振動のエネルギーを使ってみる

図のように，一定の速さ V で水平に動くベルトがある。一端を壁に固定したばね定数 k の水平なばねのもう一端に質量 m の物体をつけ、物体をベルトにのせる。物体とベルトとの間の静止摩擦係数を μ_1，動摩擦係数を μ_2 とする。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。ただし，物体の速さは，ベルトの速さ V より常に小さいものとし，またベルトの十分に長く，物体がベルトの水平面から出ることはないものとする。



ばねが自然長のときの物体の位置を原点 O とし，水平にベルトの運動方向に x 軸をとる。

(1)物体をある位置でベルトに静かに置くと，物体は静止したままであった。このときの x 座標を求めよ。

物体を $x = d$ の位置ではなすと， x 軸負方向に動き出した。ただし，その後の運動で物体の速さはベルトの速さ V より常に小さかった。

(2)物体の位置が x のとき，物体の加速度を a として運動方程式をつくれ。

(3)物体は単振動をする。単振動の中心，振幅，速度の最大値を求めよ。

(4)物体をはなした後，初めて原点を通過するときの速さを求めよ。

(5)物体をはなした後，初めて静止する位置の x 座標と，はなしてからの時間を求めよ。

(6)物体は初めて静止した後，どのような運動をするか概略を述べよ。

物体を(1)で求めた位置で初速度 v_0 ($v_0 < V$)で x 軸正方向に滑らせると，物体は単振動をした。

(7)単振動の振幅を求めよ。

(8)物体が原点を通過するときの速さを求めよ。

(解答)(1) $\frac{\mu_2 mg}{k}$　(2) $ma=-kx+\mu_2 mg$ (3)中心 $\frac{\mu_2 mg}{k}$　，振幅 $d-\frac{\mu_2 mg}{k}$　，

速さの最大 $\left(d-\frac{\mu_2 mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}$　(4) $\sqrt{\frac{kd^2}{m}-2\mu_2 gd}$　(5)位置 $-d+\frac{2\mu_2 mg}{k}$　，時間 $\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

(6)中心 $\frac{\mu_2 mg}{k}$，振幅　$d-\frac{\mu_2 mg}{k}$ の単振動(7) $v_0\sqrt{\frac{m}{k}}$　(8) $\sqrt{v_0^2-\frac{\mu_2^2 mg^2}{k}}$

30. 目的:ばねの両端におもりがある単振動について学ぶ。どこから見る？

以下の文中の[①]～[⑭]に適当な式を求めよ。

なめらかな水平面上に自然の長さが l_0 でばね定数 k のばねがある。質量 m の小球A、Bをばねに衝突させる。ばねの質量は無視でき，衝突の際，力学的エネルギーが失われることは無く，小球の運動は，ばねを含む一直線上に限定されるものとする。また図の右向きを正とする。

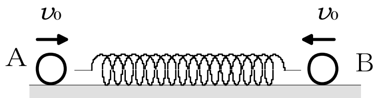


図 1

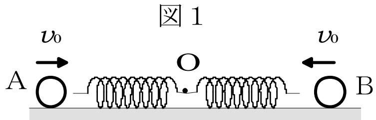


図 2

Ⅰ. 図1のように、小球 A に右向きに速さ v_0、Bに左向きに速さ v_0 の初速度を与えた。A、B は、同時にばねの左端と右端にぶつかった。このときを時刻 $t=0$ とする。

ばねが最も縮んだときの長さは[①]である。また，小球 A, B からなる体系の重心の速度は[②]である。

小球A, Bの運動を重心から観測してみる。重心の位置は，常にばねの中点(O とする)であるので，図 2 のように，重心から左右に，長さがそれぞれ $\frac{l_0}{2}$ で，ばね定数[③]の 2 本のばねに小球 A, B が衝突するのと同じである。ゆえにばねと接している間，小球 A, B は,単振動する。小球がばねと衝突してからばねが最も縮むまでの時間は[④]である。また，小球 A, B の単振動の振幅はともに[⑤]である。

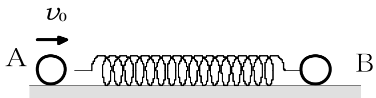


図 3

Ⅱ. 図 3 のように、小球Bをばねの右端に接触させて静止させておき、小球Aを右向きに速度 v_0 でばねに衝突させる。このときを時刻 $t=0$ とする。ばねが最も縮んだときの小球 A の速度は[⑥]で，そのときのばねの長さは[⑦]である。ばねが自然長に戻ったときの小球 B の速度は[⑧]である。

Ⅰ. と同様に，小球 A, B の運動を重心から観測しよう。小球 A, B からなる体系の重心の速度は[⑨]である。重心から見た時刻 $t=0$ での小球 B の速度は[⑩]であるので，小球 B の単振動の振幅は[⑪]である。ばねが最も縮んだとき，重心から見たAの速度は[⑫]であるので，床から見た速度は【 ⑥ 】となる。また，ばねが自然長に戻ったときの時刻は[⑬]で，重心から見たBの速度は[⑭]であるので，床から見た速度は【 ⑧ 】である。

(解答)① $l_0-v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$　②0　③$2k$　④ $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$　⑤ $v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$　⑥ $\frac{v_0}{2}$　⑦ $l_0-v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$　⑧ v_0

⑨ $\frac{v_0}{2}$　⑩ $-\frac{v_0}{2}$　⑪ $\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$　⑫0　⑬ $\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$　⑭ $\frac{v_0}{2}$

28. (解説)単振動の中心を原点として座標軸 x をとると，単振動する物体に働く合力 f は，必ず K を定数として $f=-Kx$ となる。この力には，物体に働く全ての力を含んでいる。ゆえに，物体に働く力の位置エネルギーの総計 U は，$U=\dfrac{1}{2}Kx^2$ となる。これを「単振動の位置エネルギー」あるいは「復元力による位置エネルギー」という。この考え方を使う場合は，必ず，単振動の中心（合力が 0 になる点）を原点とすること。

単振動する物体では必ず，この位置エネルギーと運動エネルギーの和が保存する。つまり，振幅 A の単振動の場合，変位 x での速度を v とし，速さの最大値を v_0 として

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}Kx^2=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

が成り立つ。

なお，この考え方が難しい場合は，物体に働く力の位置エネルギーや仕事を個別に考えて，力学的エネルギーを考えれば，計算は大変だが必ず解ける。

(1)おもりに働く力のつりあいより，

$$mg-kx_0=0 \qquad \therefore\quad x_0=\frac{mg}{k} \qquad \cdots①$$

(2)合力を f とする。ばねの伸びは，x_0+x であるので，合力 f は，①式も使って

$$f=mg-k(x_0+x)=-kx$$

(3)重力の位置エネルギーの基準を原点とする。x のところでの位置エネルギーを U，原点での位置エネルギーを U_0 とすると，①式も使って

$$U=-mgx+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2=-mgx+\frac{1}{2}kx_0^2+kx_0x+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$U_0=\frac{1}{2}kx_0^2$$

ゆえに，差は

$$U-U_0=\frac{1}{2}kx^2$$

(研究)おもりに働く重力と弾性力の合力が $-kx$ であるので，原点を基準として，合力による位置エネルギー（＝単振動の位置エネルギー）は当然，$\dfrac{1}{2}kx^2$ になる。

(4)求める速さを v_1 として，単振動の位置エネルギーを使って単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}k(2x_0)^2=\frac{1}{2}mv_1^2+\frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore\quad v_1=x_0\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(5)同様に，原点での速さを v_0 として

$$\frac{1}{2}k(2x_0)^2=\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \therefore\quad v_0=2x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(別解)単振動の中心を通過するときの速さなので，振幅×角振動数で求まる。

(参考)単振動のエネルギーを使わずに，単純に力学的エネルギー保存則で求めても良い。ただし，計算はやや手間がかかる。重力による位置エネルギーの基準を原点として

(4) $$-2mgx_0+\frac{1}{2}k(x_0+2x_0)^2=\frac{1}{2}mv_1^2-mgx_0+\frac{1}{2}k(x_0+x_0)^2$$

①式も用いてこれを解く。　$v_1=x_0\sqrt{\dfrac{3k}{m}}$

(5) $$-2mgx_0+\frac{1}{2}k(x_0+2x_0)^2=\frac{1}{2}mv_0^2+\frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore\quad v_0=2x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

29.(解説)運動方程式が

$$ma=-Kx+C \quad (K,\ C\text{は定数})$$

となる場合の単振動と，単振動の位置エネルギーを復習して欲しい。

ベルトから物体に働く動摩擦力は，ベルトから見た相対速度と逆向きである。ベルトの速さの方が大きいときは，ベルトから見た物体の速度は x 軸負方向となり，動摩擦力は正方向に働く。

物体のある位置での速さを求める場合，動摩擦力がする仕事が，力学的エネルギーの変化となる ことを利用して解いてもよいが，単振動のエネルギーを使う方が効率よく解ける。単振動の中心からの変位が X のときの速度を v とし，振幅 A，速度の最大値 v_0 とすると

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}KX^2=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

(1)物体の速度は 0 なので，ベルトから見た相対速度は x 軸負方向で，物体には x 軸正方向の動摩擦力が働く。物体が静止し続けるためには，ばねの弾性力と，動摩擦力がつりあう位置である。この位置を x_0 として

$$-kx_0+\mu_2mg=0 \qquad \therefore \quad x_0=\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)同様に動摩擦力は x 軸正方向である。ゆえに，運動方程式は

$$ma=-kx+\mu_2mg \qquad \cdots① \quad \cdots(\text{答})$$

(①式は，物体が単振動することを示している。角振動数 ω と周期 T は

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

である。)

(3)中心では $a=0$ であるので，中心の位置 x_1 は①式より

$$0=-kx_1+\mu_2mg \qquad \therefore \quad x_1=\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

で，(1)の x_0 と同じである。

また，$x=d$ の位置で速さ 0 なので，単振動の右端である。ゆえに振幅 A_1 は

$$A_1=d-x_1=d-\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

速度が最大になるのは単振動の中心を通過するときであり，その速さを v_1 とすると

$$v_1=A_1\omega=\left(d-\frac{\mu_2mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)単振動であるので，中心 x_1 からの変位を X とすると，単振動の位置エネルギーは $\frac{1}{2}kX^2$ であらわせる。原点では $X=0-x_1=-\frac{\mu_2mg}{k}$ であるので，速さを v として，単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(-\frac{\mu_2mg}{k}\right)^2=\frac{1}{2}kA_1^2=\frac{1}{2}K\left(d-\frac{\mu_2mg}{k}\right)^2$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{\frac{kd^2}{m}-2\mu_2gd} \qquad \cdots(\text{答})$$

(別解)最初に原点に到達するまでに，動摩擦力が物体にする仕事は $-\mu_2mgd$ である。力学的エネルギーの変化が，保存力以外の仕事であるので

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}Kd^2=-\mu_2mgd \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{kd^2}{m}-2\mu_2gd}$$

(5)初めに静止する位置 x は，単振動の左端であるので

$$x = d - 2A = -d + \frac{2\mu_2 mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

また時間 t は，単振動の半周期なので　$t = \dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　…(答)

(6)物体は右へ動き出すが，常にベルトの方が速く動摩擦力は x 軸正方向に働く。ゆえに，物体の運動方程式は①式と同じであるので，中心も振幅も変化しない。

中心 $x_1 = \dfrac{\mu_2 mg}{k}$，振幅　$A_1 = d - \dfrac{\mu_2 mg}{k}$ の単振動を続ける。　…(答)

(7)物体に働く力を考えると運動方程式は①式となり，先ほどと同じ単振動をする。ゆえに物体は単振動の中心で速度 v_0 をもつことになり，振幅を A_2 として，単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kA_2^2 \qquad \therefore \quad A_2 = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)原点を通過する速さを v として

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k\left(-\frac{\mu_2 mg}{k}\right)^2 \qquad \therefore \qquad v = \sqrt{v_0^2 - \frac{\mu_2^2 mg^2}{k}} \qquad \cdots(\text{答})$$

30.（解説)この運動で，重心は常にばねの真ん中であり，また，外力が働かない(運動量が保存する)状況なので，重心は等速運動する。(始めに静止していれば静止したまま)

そこで，重心から見た運動を考えると，重心の左右にそれぞれ長さが半分(ばね定数が 2 倍)のばねがあり，それぞれ小球が接触した単振動と考える。重心は等速運動なので，重心から見ると慣性力などは考える必要が無く，静止している点から見るのと物理法則は同じである(慣性系である)。ばね定数はばねの長さに反比例することに注意しよう。

Ⅰ．①運動の対称性より，ばねが最も縮んだとき小球 A，B の速度は 0 である。ばねの縮みを x_0 として，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \times 2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore \quad x_0 = v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

ゆえにばねの長さは，　$l_0 - v_0\sqrt{\dfrac{2m}{k}}$　…(答)

②重心の速度 V_G は　$V_G = \dfrac{m(-v_0) + mv_0}{m+m} = 0$　…(答)

③ばね定数は，長さに反比例するので　$2k$　…(答)

④重心からは，自然長 $\dfrac{l_0}{2}$，ばね定数 $2k$ のばねに，それぞれ小球 A，B が速度 v_0 で，単振動の中心（自然長）から運動が始まるように見える。ゆえに単振動の周期 T は，$T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$　である。最初にばねが最も縮むまでの時間は，単振動の中心から端までなので　$\dfrac{T}{4} = \dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$　…(答)

⑤それぞれの単振動の振幅を A として　$\dfrac{1}{2}mv_0^2 = \dfrac{1}{2}\cdot 2kA^2$　$\therefore$　$A = v_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

(別解)重心から見てそれぞれの単振動の最大の速さは v_0 で，角振動数は $\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ であるので

$$A\sqrt{\frac{2k}{m}} = v_0 \qquad \therefore \quad A = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad \cdots(\text{答})$$

Ⅱ.⑥ばねが最も縮んだとき，小球 A，B の速度は等しく，Vとする。運動量保存則より

$$m\upsilon_0 = 2mV \qquad \therefore \quad V = \frac{\upsilon_0}{2} \qquad \cdots(答)$$

⑦このときのばねの縮みを x_1 とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}\cdot 2mV^2 + \frac{1}{2}kx_1^2$$

⑥の Vを代入して，x_1を求める。 $x_1 = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$

ゆえに長さは， $l_0 - x_1 = l_0 - \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ $\cdots$(答)

⑧ばねが自然長に戻ったときの小球 A，B の速度をそれぞれ υ_A，υ_Bとする。運動量保存則より

$$m\upsilon_0 = m\upsilon_A + m\upsilon_B$$

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_A^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_B^2$$

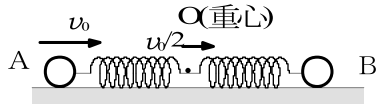
これら2式を解いて，$\upsilon_B = 0, \upsilon_0$

$\upsilon_B = 0$ は，はじめの状態で不適であるので， $\upsilon_B = \upsilon_0$ $\cdots$(答)

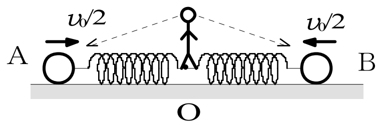
⑨重心の速度 V_Gは

$$V_G = \frac{m\upsilon_0}{m+m} = \frac{\upsilon_0}{2} \qquad \cdots(答)$$

$t=0$ 床から見た運動



$t=0$ 重心から見た運動



⑩重心からみた小球 B の相対速度をu_Bとする。時刻 $t=0$ で

$$u_B = 0 - V_G = -\frac{\upsilon_0}{2} \qquad \cdots(答)$$

これより，重心から見た小球 B の運動は，自然長 $\dfrac{l_0}{2}$，ばね定数 $2k$ のばねに，左向き速さ$\dfrac{\upsilon_0}{2}$で，単振動の中心（自然長）から運動が始まる単振動となる。同様に小球 A は，右向き速さ$\dfrac{\upsilon_0}{2}$で始まる単振動となる。（右図）

⑪小球 B の単振動の振幅を A'として，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\left(-\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2kA'^2 \qquad \therefore \quad A' = \frac{\upsilon_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad \cdots(答)$$

(参考)小球 A の単振動の振幅も同じであり，ばねが最も縮むとき，それぞれのばねが A'だけ縮んでいるので，全体でばねの縮みは$2A' = \upsilon_0\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ となり，⑦の x_1と一致する。

⑫最も縮むのは単振動の右端なので，重心に対する相対速度$u_A = 0$ $\cdots$(答)

床から見た小球 A の速度$\upsilon_A = u_A + V_G = \dfrac{\upsilon_0}{2}$ で⑥と一致する。

⑬単振動の周期の$\dfrac{1}{2}$である。ばね定数が $2k$ であることに注意して $\dfrac{T}{2} = \pi\sqrt{\dfrac{m}{2k}}$ $\cdots$(答)

⑭重心から見ると単振動の中心を右向きに通過するので，相対速度$u_B = \dfrac{\upsilon_0}{2}$ $\cdots$(答)

(参考)床から見た小球 B の速度$\upsilon_B = u_B + V_G = \upsilon_0$ で⑧と一致する。