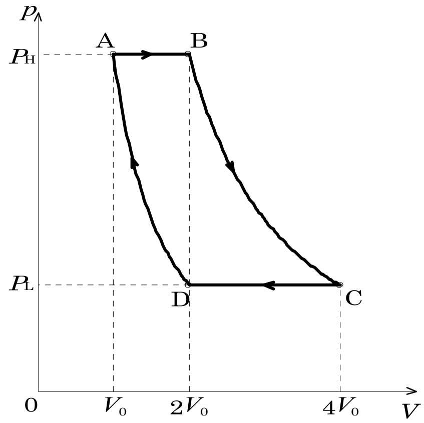
31. 目的:熱機関についてのまとめ



ピストンとシリンダーからなる熱機関について考える。シリンダー内には，理想気体として扱うことができる単原子分子気体が n〔mol〕封入されている。この気体の気体定数を R〔J/(mol･K)〕とするとき，定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$〔J/(mol･K)〕，定圧モル比熱は $\frac{5}{2}R$〔J/(mol･K)〕である。この熱機関では，気体の状態が図のように A→B→C→D→A という経路(サイクル)で変化する。状態変化 A→B および C→D は定圧変化，状態変化 B→C および D→A は断熱変化である。気体の状態を気体の圧力 p〔Pa〕と体積 V〔m³〕を組にして(p, V)で表すとき，図の各状態は，状態 A:(P_H, V_0)，状態 B:(P_H, $2V_0$)，状態 C:(P_L, $4V_0$)，状態 D:(P_L, $2V_0$)である。以下の(1)～(8)に答えよ。ただし，気体がする仕事の符号は，気体が膨張する場合を正とし，収縮する場合を負とする。また，熱の符号は，気体が加熱される場合を正とし，冷却される場合を負とする。なお，各設問の末尾で{　} 内に記号が指示されている場合には，その記号のみを用いて解答せよ。

(1)状態 A の気体の絶対温度を求めよ。{P_H, V_0, n, R}

(2)状態変化 A→B において，気体の内部エネルギーの変化 ΔU_{AB}〔J〕と気体のする仕事 W_{AB}〔J〕を求めよ。ただし，ΔU_{AB} は，U_A，U_B をそれぞれ状態 A，状態 B の気体の内部エネルギーとするとき，$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ を表すものとする。{P_H, V_0}

(3)状態変化 A→B で，気体が得る熱量 Q_{AB}〔J〕を求めよ。{P_H, V_0}

(4)状態変化 B→C は断熱膨張である。このときの気体の内部エネルギーの変化を ΔU_{BC}〔J〕，気体のする仕事を W_{BC}〔J〕とするとき，W_{BC} を ΔU_{BC} で表せ。また，内部エネルギーの変化 ΔU_{BC} を求めよ。{P_H, P_L, V_0}

(5)この熱機関が1サイクル A→B→C→D→A の間に得る熱量は合計でいくらになるか。{P_H, P_L, V_0}

(6)この熱機関が 1 サイクルの間にする仕事は合計でいくらになるか。{P_H, P_L, V_0}

(7)この熱機関の熱効率を求めよ。{P_H, P_L}

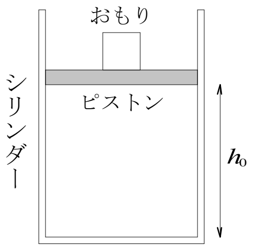
(8)単原子分子理想気体の断熱変化では，$pV^{\frac{5}{3}}$ が一定に保たれることがわかっている。このため，図の状態変化における P_H と P_L は互いに独立ではない。P_H と P_L の関係を式で表せ。{P_H, P_L}
次に，この熱機関の熱効率を有効数字 2 桁で計算せよ。必要なら $2^{\frac{2}{3}} = 1.59$ を利用せよ。

(名古屋工大)

(解答)(1) $\frac{P_H V_0}{nR}$　(2) $\frac{3}{2}nR(T_B - T_A)$　(2) $\frac{3}{2}P_H V_0$　, $P_H V_0$　(3) $\frac{5}{2}P_H V_0$　(4) $-\Delta U_{BC}$　$3(2P_L - P_H)V_0$　(5) $\frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0$　(6) $\frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0$　(7) $1 - \frac{2P_L}{P_H}$　(8) 0.37

32.目的:近似計算に慣れる。断熱変化に慣れる。

右図のように断面積 S のシリンダーが鉛直に置かれ，n モルの単原子分子理想気体がなめらかに動く軽いピストンでシリンダーに密封されている。ピストンの上に，質量 m のおもりを置く。温度 T_0 のとき，シリンダーの底から高さが h_0 の位置でピストンは静止した。この位置をつりあいの位置とする。大気圧を P_0，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。ただし，必要に応じて $1 \gg x$ の時に成り立つ近似式



$$(1+x)^a \fallingdotseq 1+ax$$

用いよ。

〔A〕シリンダー，ピストンがともに十分に熱をよく伝え，シリンダー内の気体の温度は常に T_0 であるとする。

(1)ピストンがつりあいの位置にあるとき，気体の圧力を求めよ。

ピストンに手で力を加えて微少な距離だけ押し下げた。手を離すと，ピストンは上昇した。ピストンがつりあいの位置から距離 y だけ下の位置を通過する時を考える。

(2)ピストンに働く合力を求めよ。ただし，$h_0 \gg y$ とし，鉛直下向きを正とする。

(3)手を離した後，ピストンはどのような運動をするか答よ。

〔B〕次にシリンダー，ピストンがともに断熱材でできており，シリンダー内の気体と外部と熱のやりとりはないものとする。はじめの気体の温度は T_0 で，ピストンはつりあいの位置にあった。

ピストンに手で力を加えて距離 d だけ押し下げた。このとき気体は断熱変化をする。断熱変化の際の気体の圧力 P と体積 V の間には

$$PV^{\frac{5}{3}} = 一定$$

という関係がある。

(4)ピストンを d だけ押し下げているとき，気体の圧力を求めよ。

(5)このときの気体の温度を求めよ。

ピストンを押し下げた距離 d が h_0 に比べて十分に小さいとき，手を離すとピストンは単振動をする。

(6)単振動の周期を求めよ。

(答)(1) $P_0 + \dfrac{mg}{S}$ (2) $-\dfrac{P_0S+mg}{h_0}y$ (3)つりあいの位置を中心とし，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{mh_0}{P_0S+mg}}$ の単振動

(4) $\left(P_0 + \dfrac{mg}{S}\right)\left(\dfrac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{5}{3}}$ (5) $\left(\dfrac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{2}{3}}T_0$ (6) $2\pi\sqrt{\dfrac{3mh_0}{5(P_0S+mg)}}$

31．(解説)熱機関の問題である。気体の状態変化の際の仕事，内部エネルギーの変化，気体に与えた熱をしっかり求められるようになろう。また，状態方程式をうまく利用し，式に使用する物理量を変換しよう。

熱機関の効率 e は，気体に与えた熱を Q_{In}，1サイクルでした仕事 W として

$$e=\frac{W}{Q_{In}}$$

である。ここで Q_{In} は気体に与えた熱の和で，気体が放出した熱は含まない。つまり1サイクルで差し引き与えた熱ではない。

熱機関は1サイクルで元に戻る。ゆえに温度も元に戻り，内部エネルギーも戻る。つまり，内部エネルギーの変化量は 0 である。ゆえに1サイクルで差し引き与えた熱を Q とすると，1サイクルでした仕事 W は，熱力学第 1 法則より

$$Q=W$$

となる。

気体が放出した熱を Q_{Out} とする。$Q_{Out}=$ |放出した時の熱の和|とすると，

$$Q=W=Q_{In}-Q_{Out}$$

となるので，効率は

$$e=\frac{Q_{In}-Q_{Out}}{Q_{In}}=1-\frac{Q_{Out}}{Q_{In}}$$

となる。

(解答)A, B, C, D の各状態での温度をそれぞれ T_A，T_B，T_C，T_D とする。気体の状態方程式をまずつくっておこう。

A:　$P_HV_0=nRT_A$　…①　，　B:　$2P_HV_0=nRT_B$　…②

C:　$4P_LV_0=nRT_C$　…③　，　D:　$2P_LV_0=nRT_D$　…④

(1)①式より　$T_A=\dfrac{P_HV_0}{nR}$　…(答)

(2)内部エネルギーの変化は，何変化であろうと求め方は同じ。

$$\varDelta U_{AB}=nC_V\varDelta T=\frac{3}{2}nR(T_B-T_A)$$

①，②式を代入して

$$\varDelta U_{AB}=\frac{3}{2}(2P_HV_0-P_HV_0)=\frac{3}{2}P_HV_0 \qquad \cdots(答)$$

定圧変化であるので，仕事 ＝ 気圧×体積変化　で求まる。

$$W_{AB}=P_H(2V_0-V_0)=P_HV_0 \qquad \cdots(答)$$

(3)熱力学第 1 法則より

$$Q_{AB}=\varDelta U_{AB}+W_{AB}=\frac{3}{2}P_HV_0+P_HV_0=\frac{5}{2}P_HV_0 \qquad \cdots(答)$$

(別解)定圧変化であるので

$$Q_{AB}=nC_P\varDelta T=\frac{5}{2}nR(T_B-T_A)$$

①，②式を代入して求めればよい。

(4)熱の出入りがない。ゆえに熱力学第1法則より

$$0=\varDelta U_{BC}+W_{BC} \qquad \therefore \quad W_{BC}=-\varDelta U_{BC} \qquad \cdots(答)$$

内部エネルギーの変化の求め方は同じ。②，③式も使って

$$\varDelta U_{BC}=\frac{3}{2}nR(T_C-T_B)=\frac{3}{2}(4P_LV_0-2P_HV_0)=3(2P_L-P_H)V_0 \qquad \cdots(答)$$

(5)題意は，1サイクルで差し引き与えた熱 Q を求めよということである。

状態 C から D の変化での気体に与えた熱 Q_{CD} は，定圧変化なので

$$Q_{CD} = nC_P \Delta T = \frac{5}{2}nR\left(T_D - T_C\right)$$

③，④式も使って

$$Q_{CD} = \frac{5}{2}\left(2P_LV_0 - 4P_LV_0\right) = -5P_LV_0$$

(負であるので，気体は熱を放出している)

状態 B→C と D→A は断熱変化で熱の出入りはないので，差し引き与えた熱 Q は

$$Q = Q_{AB} + Q_{CD} = \frac{5}{2}P_HV_0 - 5P_LV_0 = \frac{5}{2}\left(P_H - 2P_L\right)V_0 \qquad \cdots(答)$$

(この熱機関では気体に熱を与えたのが A→B の過程だけ，気体から熱が放出されたのは C→D だけである。ゆえに，Q_{In} と Q_{Out} はそれぞれ

$$Q_{In} = Q_{AB} = \frac{5}{2}P_HV_0 \quad , \quad Q_{Out} = \left|Q_{CD}\right| = 5P_LV_0$$

ゆえに，1 サイクルで差し引き与えた熱は

$$Q = Q_{In} - Q_{Out} = \frac{5}{2}\left(P_H - 2P_L\right)V_0$$

となる。)

(6)1サイクルで気体の温度は元に戻るので，内部エネルギーの変化は 0 である。ゆえに1サイクルでの仕事 W は，熱力学第 1 法則より

$$W = Q = \frac{5}{2}\left(P_H - 2P_L\right)V_0 \qquad \cdots(答)$$

(別解)各過程での仕事をそれぞれ求めて足してもよい。(4)より

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 3\left(P_H - 2P_L\right)V_0$$

C→D は定圧変化なので

$$W_{CD} = P_L\left(2V_0 - 4V_0\right) = -2P_LV_0$$

D→A は断熱変化であるので，B→C と同様にして求める。

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -\frac{3}{2}nR\left(T_A - T_D\right) = -\frac{3}{2}\left(P_HV_0 - 2P_LV_0\right)$$

これと，(2)の W_{AB} も考えて

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = \frac{5}{2}\left(P_H - 2P_L\right)V_0$$

(7)状態 B→C と D→A は断熱変化で，熱の出入りはない。状態 C→D では $Q_{\mathrm{CD}} < 0$ で気体は熱を放出している。ゆえに，気体に熱を与えたのは，状態 A→B の変化だけである。ゆえに効率は

$$e = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{5}{2}\left(P_H - 2P_L\right)V_0}{\frac{5}{2}P_HV_0} = 1 - \frac{2P_L}{P_H} \qquad \cdots(答)$$

(8)状態 B→C の変化について式をつくると

$$P_H\left(2V_0\right)^{\frac{5}{3}} = P_L\left(4V_0\right)^{\frac{5}{3}} \qquad \therefore \quad \frac{P_L}{P_H} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}$$

これを(7)の効率の式に代入して

$$e = 1 - \frac{2}{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{1}{1.59} = 0.371\square \fallingdotseq 0.37 \qquad \cdots(答)$$

32.（解説）断熱変化では　$PV^{\gamma}=$一定と同時に，

$$TV^{\gamma-1}=\text{一定}$$

が成り立つ。(5)はこれを用いる解法もある。

近似は目的を持って使うこと。この問題では，ピストンに働く力を求めるために近似を用いるが，分母をすっきりさせることが目的である。

質量 m の物体に働く力 f が，変位 x で定数を K として

$$f=-Kx$$

となる場合，物体は単振動をし，周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

である。

(1)気体の圧力を P_1 とする。ピストンに働く力のつりあいより

$$P_0S+mg-P_1S=0 \qquad \therefore \quad P_1=P_0+\frac{mg}{S} \qquad \cdots\text{（答）}$$

(2)気体の圧力を P とする。気体の体積は $S(h_0-y)$ である。温度一定なのでボイルの法則より

$$P_1Sh_0=PS(h_0-y)$$

$$\therefore \quad P=\frac{h_0}{h_0-y}P_1=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0-y}\right)=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1-\dfrac{y}{h_0}}\right)$$

ここで $h_0 \gg y$ より，$1\gg\dfrac{y}{h_0}$ であるので近似を用いて

$$P=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1-\dfrac{y}{h_0}}\right)\fallingdotseq\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{y}{h_0}\right)$$

下向きを正としてピストンに働く力 f は

$$f=P_0S+mg-PS=P_0S+mg-\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(1+\frac{y}{h_0}\right)S=-\frac{P_0S+mg}{h_0}y \qquad \cdots\text{(答)}$$

(3)ピストンに働く力 f は復元力であり，ピストンが単振動していることを示す。中心は $f=0$ の点であるのでつりあいの位置である。単振動の周期 T は

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{\dfrac{P_0S+mg}{h_0}}}=2\pi\sqrt{\frac{mh_0}{P_0S+mg}}$$

つりあいの位置を中心とし，周期 $2\pi\sqrt{\dfrac{mh_0}{P_0S+mg}}$ の単振動　　$\cdots$（答）

(4)気体の圧力を P_2 とする。断熱変化の式より

$$P_1(Sh_0)^{\frac{5}{3}}=P_2\{S(h_0-d)\}^{\frac{5}{3}}$$

$$\therefore \quad P_2=\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{5}{3}}P_1=\left(P_0+\frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0-d}\right)^{\frac{5}{3}} \qquad \cdots\text{(答)}$$

(5)気体の温度を T とする。ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{P_1 S h_0}{T_0} = \frac{P_2\{s(h_0 - d)\}}{T}$$

$$\therefore \quad T = \frac{P_2\{S(h_0 - d)\}}{P_1 S h_0} T_0 = \left(\frac{h_0}{h_0 - d}\right)^{\frac{2}{3}} T_0$$ ・・・(答)

(別解)断熱変化の際，温度 T と体積 V の間に単原子分子理想気体では

$$TV^{\frac{2}{3}} = 一定$$

が成り立つ。これより

$$T_0(Sh_0)^{\frac{2}{3}} = T\{S(h_0 - d)\}^{\frac{2}{3}} \qquad \therefore \quad T == \left(\frac{h_0}{h_0 - d}\right)^{\frac{2}{3}} T_0$$

(6)手を離した後，ピストンがつりあいの位置から距離 y だけ下の位置を通過する時を考える。このときの気体の圧力を P' とすると，(4)と同様に

$$P' = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{h_0}{h_0 - y}\right)^{\frac{5}{3}}$$

$h_0 \gg y$ より，近似を用いて

$$P' = \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(\frac{1}{1 - \frac{y}{h_0}}\right)^{\frac{5}{3}} \fallingdotseq \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(1 + \frac{5y}{3h_0}\right)$$

これよりピストンに働く力 f' は，下向きを正として

$$f = P_0 S + mg - P'S = P_0 S + mg - \left(P_0 + \frac{mg}{S}\right)\left(1 + \frac{5y}{3h_0}\right)S = -\frac{5(P_0 S + mg)}{3h_0} y$$

これより，単振動の周期 T' は

$$T' = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{5(P_0 S + mg)}{3h_0}}} = 2\pi\sqrt{\frac{3mh_0}{5(P_0 S + mg)}}$$ ・・・(答)