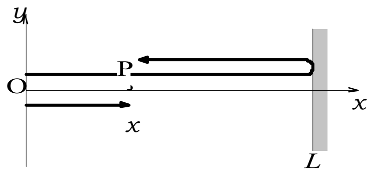
33. 目的：波の式の復習と，定常波を式で表す。

（波の式，反射による定常波）



図において，原点 O の媒質は変位 $y = A\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ で表される単振動をし，その振動が x 軸の正の向きに伝わっていく波(平面波)を考える。A〔m〕は振幅，T〔s〕は周期，t〔s〕は時間である。この平面波は距離 L〔m〕のところの反射面で，同位相で反射する。平面波は媒質中を速度 v〔m/s〕で減衰せずに伝わり，また反射による減衰はないものとする。次の問いの[　　]内に適当な式または数値を入れよ。

(1)この平面波の波長 λ〔m〕は T と v により[　ア　]と表せる。

(2)原点 O を発した平面波は原点 O より距離 x〔m〕($0 < x < L$)離れた点 P に遅れて到達する。平面波の速度は v であるから，遅れの時間は v と x より[　イ　]と表せる。したがって，点 P での変位 y_1〔m〕は $y_1 =$ [　ウ　]と表せる。

(3)原点 O から距離 L のところで反射して点 P に達した平面波(反射波)はさらに遅れる。原点からの遅れの時間は L，v と x より[　エ　]と表せる。反射波は同位相で反射するので，点 P での反射波の変位 y_2〔m〕は $y_2 =$ [　オ　]と表せる。

(4)点 P の変位 y_x〔m〕は原点から直接到達した平面波の変位 y_1 と反射波の変位 y_2 の和で求められる。y_x を積の形に書き直すと $y_x =$〔　カ　〕となる。

(5)(4)より，x 軸上で時間によらず変位しない場所があることがわかる。L が λ に等しいとき，この位置は O～L 間に[　キ　]点ある。原点 O に近い点の座標を L により表すと $x =$ [　ク　]となる。

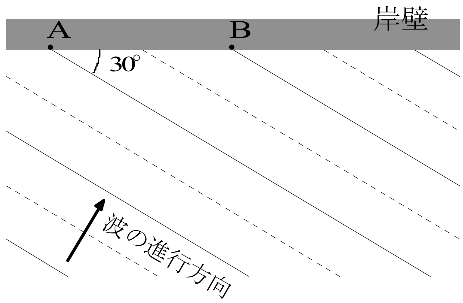
(解答) (1)ア．　vT　(2)イ．　$\dfrac{x}{v}$　ウ．　$A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{x}{v}\right)$　あるいは $A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{x}{\lambda}\right)$

(3)エ．　$\dfrac{2L-x}{v}$　オ．　$A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t+\dfrac{x}{v}-\dfrac{2L}{v}\right)$　あるいは　$A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}+\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{2L}{\lambda}\right)$

(4)カ．　$2A\sin\dfrac{2\pi}{T}\left(t-\dfrac{L}{v}\right)\cos\dfrac{2\pi}{T}\left(\dfrac{x}{v}-\dfrac{L}{v}\right)$　あるいは　$2A\sin 2\pi\left(\dfrac{t}{T}-\dfrac{L}{\lambda}\right)\cos 2\pi\left(\dfrac{x}{\lambda}-\dfrac{L}{\lambda}\right)$

(5)キ．　2　ク．　$\dfrac{L}{4}$

34. 目的：平面波の干渉について考える。



岸壁に平面波が押し寄せている。図で，実線は平面波の山，点線は平面波の谷の波面を表している。波面と岸壁の角度は 30°で，岸壁に沿って隣り合う山(図中の A と B)の間隔は L である。波の振動数を f として以下の問に答えよ。

(1)この平面波の波長 λ を L で表せ。また波の速さ v を f, L で表せ。

(2)岸壁に沿って波の山が移動する速さを v で表せ。

(3)岸壁と垂直な方向に沿って，隣り合う山の間隔を L で表せ。

岸壁は波を反射する。反射波は入射波と同位相である。

(4)図の状態での反射波を記入せよ。

(5)入射波と反射波の重ね合わせにより，大きな山になる点がある。図の状態で任意の大きな山の1つにて○をつけ，さらにその山の進行方向を矢印で示せ。

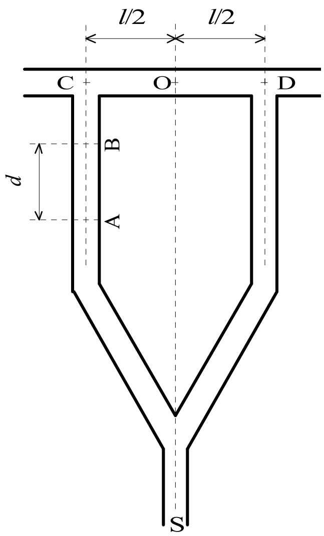
(6)入射波と反射波の干渉により，全く振動しない点がある。これらの点を連ねた線(節線)のうち，岸壁に最も近い線を図に記入せよ。

(7)隣り合う節線の間隔を λ で表せ。

(解答)（1） $\lambda=\dfrac{L}{2}$ ， $v=\dfrac{fL}{2}$ （2） $2v$ （3） $\dfrac{\sqrt{3}L}{3}$ （4)～(6) 略 （7） $\dfrac{\sqrt{3}\lambda}{3}$

35．目的：干渉について，本当に理解する。

大きな水槽中に図のような水深 h の水路をつくる。ただし，長さ d の区間ABの水深は変えられる。水路の形は線OSに関して左右対称である。水路の一端Sから振動数 f の水面波を送り込む。この波の速さは水深の平方根に比例し，その波長は水路の幅より十分長く，AB間の長さ d，CD間の長さ l よりは十分短いとする。このとき波は水路中を正弦波として伝わるものとし，以下の設問に答えよ。



(1)全水路で水深を h としたとき，点O近くで波長 λ の定常波が見られた。点Oはこの定常波の腹か節か理由を付して答えよ。また，AB間を進む波の速さ V を求めよ。

(2)区間ABの水深をゆっくり変えると定常波の腹や節の位置は徐々にずれる。水深が h' になったとき，O→D方向に向かって測ったこのずれの距離は x となった。h' と h の比を求めよ。なお，深さが変わるところでの波の反射は無視してよい。

(3)区間ABの水深を再び h にもどし，直線部分CODに水をCからDの向きに速さ v で流す。流れは一様で，この直線部分以外には及ばないとする。C→Dに進む波とD→Cに進む波の波長をそれぞれ求めよ。また，この2つの波の点Oでの位相の差を求めよ。

(4)設問(3)で点Oが節となるような水流の速さ v の最小値を求めよ。ただし $V>v$ とする。

（東京大）

(解答)(1) 腹 ，速さ $f\lambda$ (2) $\dfrac{h'}{h}=\left(\dfrac{d}{d-2x}\right)^2$ (3)C→D: $\lambda+\dfrac{v}{f}$ ，D→C: $\lambda-\dfrac{v}{f}$

位相差 $\dfrac{2\pi flv}{f^2\lambda^2-v^2}$ (4) $f\left(\sqrt{l^2+\lambda^2}-l\right)$

33. (解説)ある点の単振動が時間をかけて伝わっていくのが波動であるので，遅れた時間を引くことで，別な点の振動を式で表せる。これが波の式である。逆向きに進む波動が重なって出来る定常波も，この式を使って表せる。この問題の(4)で求まる式

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)$$

が定常波を表す。この式で $\left|2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)\right|$ が，任意の x の地点での振動の振幅を表し，

$\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)$ の部分が時間とともに振動することを表している。

$\left|2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)\right|$ が $2A$ になる点が腹，0 になる点が節である。

(1)ア．公式より(公式じゃなくても，波は 1 周期で 1 波長進むという基本から)　$\lambda = vT$　…(答)

(2)イ．遅れの時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{x}{v}\quad \cdots(答)$$

ウ．原点より t_1 だけ遅れた振動をするので

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_1) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)\quad \cdots(答)$$

(さらに λ を用いると　$y_1 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{vT}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$　)

(3)エ．いったん壁に当たってから x に到達するまでの距離は $L+(L-x)=2L-x$ であるので，遅れの時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{2L-x}{v}\quad \cdots(答)$$

オ．ウ．と同様に

$$y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_2) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)\quad \cdots(答)$$

(さらに λ を用いると　$y_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2L-x}{vT}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{2L}{\lambda}\right)$　)

(4)カ．

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right) + A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)$$

$$= 2A\sin\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)}{2}\right\}\cos\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)-\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)}{2}\right\}$$

$$= 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{x}{v}+\frac{L}{v}\right) = 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)\quad \cdots(答)$$

(さらに λ を用いると　$y = 2A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)$　)

(5)キ．y の式で，$\left|2A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)\right|$ が，ある x の点での単振動の振幅を表す。これが 0 の点が時間によらず振動しない点，定常波の節である。ゆえに

$$2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}(2m+1) \qquad ただし，m=0,\pm1,\pm2\square$$

$L=\lambda$ の条件で，$0\leqq x\leqq L$ の範囲でこれが成り立つのは

$$x=\left(\frac{5}{4}+\frac{m}{2}\right)L=\frac{L}{4},\frac{3L}{4}$$

の 2 カ所である。　　　2　　…(答)

(別解)

式を使わなくても，反射による定常波なので節の位置は簡単にわかる。

自由端は腹である。腹と節の間隔は $\frac{\lambda}{4}=\frac{L}{4}$ であるので，壁に近い節の位置は

$$x=L-\frac{L}{4}=\frac{3L}{4}$$

定常波の節と節の間隔(腹と腹も)は $\frac{\lambda}{2}=\frac{L}{2}$ であるので，さらに節の位置は

$$x=\frac{L}{4},-\frac{L}{4}\square$$

ゆえに $0\leqq x\leqq L$ の範囲では　　$x=\frac{L}{4},\frac{3L}{4}$ の 2 カ所である。

ク. 原点に近いのは　$x=\frac{L}{4}$　　…(答)

34. (解説)平面波の反射による干渉の問題である。岸壁を波(山)が移動していく速度は，波の速度より大きくなる。ただし，実際に速いのではなく。次々と同位相の山が岸壁に到着し，移動しているように見えるだけである。

入射波と反射波が干渉するが，大きな山の移動方向は，入射波と反射波をそれぞれ少しだけ移動して考えてみよう。また移動方向を結んだ線が腹線となり，それと平行に節線がある。

(1) 図 1 のように，隣り合う波面の間隔が波長 λ である。波面と直角に距離を考える。岸壁上で隣り合う波面の距離が L なので

$$\lambda=L\sin30^\circ=\frac{L}{2} \qquad \cdots① \qquad \cdots(答)$$

また，振動数は f なので

$$v=f\lambda=\frac{fL}{2} \qquad \cdots② \qquad \cdots(答)$$

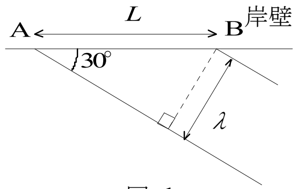


図 1

(2)岸壁に沿って波の山が A から B まで移動するのにかかる時間は，波の周期であるので $\frac{1}{f}$ となる。ゆえに，岸壁に沿った山の移動速度 V は，②式も用いて　$V=\dfrac{L}{\frac{1}{f}}=fL=2v$　　…(答)

(別解)

図 2 のように①の波面が時間 t 後に②へ移動したとする。a の山は，b へ移動するので　$ab=vt$　である。しかし，岸壁と平行な方向で考えると，時間 t 後には c が岸壁に接する山である。これは元々 a にあった山が移動したのではなく，d にあった山が移動したのであるが，この間，岸壁に平行な ac には次々と山が到着し，山が移動しているように見える。従って，ac に沿って山の移動速度を V とすると　$ac=Vt$　である。図より

$$Vt=\frac{vt}{\sin30^\circ} \qquad \therefore \qquad V=2v$$

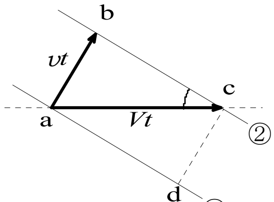


図 2

(3)図 3 のように B から岸壁に直交する線を引くと，次の山は C である。ゆえに間隔 l は

$$l = L\tan 30° = \frac{\sqrt{3}L}{3} \qquad \cdots(答)$$

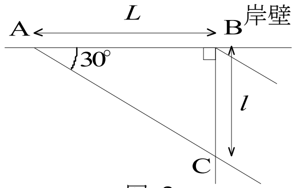


図 3

(4)入射角と反射角が等しいので，反射波も波面と岸壁との角が 30° である。また岸壁で反射する際に位相が変化しないので，図 4 のようになる。

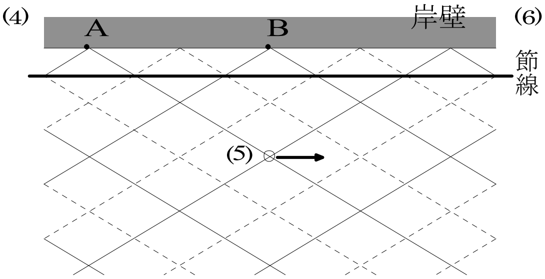


図 4

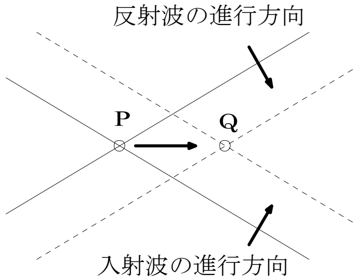


図 5

(5)入射波と反射波の山が重なる点が，大きな山になる。また，進む方向は，それぞれの波が少しだけ進行したとして考えればよい。図 5 に，山の周辺だけを拡大した。図で実線は現在の山の波面，波線は少し時間が経過した後の山の波面である。現在 P にある大きな山が，Q へ移動する。従って，大きな山の移動方向は矢印の方向で，岸壁に平行な方向である。図 4 中に解答として示す。

このように大きな山を通る岸壁に平行な直線上では，時間と共に大きな山や大きな谷になる。つまり腹線である。

(6)節線は腹線に平行で，腹線の中間にある。図 4 中に解答を示す。

(7)図 6 に示すように，岸壁に最も近い節線は R を通り，次の節線は S を通る(図に節線は描いていない)。ゆえに間隔は，①式も用いて

$$\frac{L}{4}\tan 30°\times 2 = \frac{\sqrt{3}}{6}L = \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda \qquad \cdots(答)$$

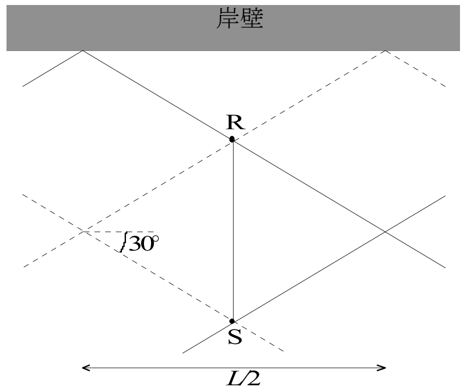


図 6

(別解 1)

図 7 のように R から入射波の波面に垂線をおろし，交点を T とする。RT が $\frac{\lambda}{2}$ であるので，RS は

$$\frac{\frac{\lambda}{2}}{\cos 30°} = \frac{\sqrt{3}}{3}\lambda$$

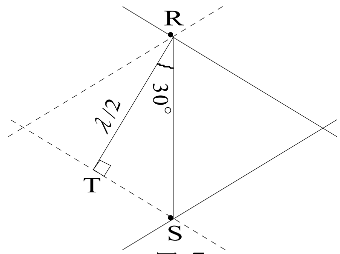


図 7

(別解 2)

岸壁に直交する方向には山の間隔が(3)で求めた l である。これをこの方向の波長と考える。岸壁と直交する方向には定常波が出来ると考えてよい。ゆえに節の間隔は $\frac{l}{2} = \frac{\sqrt{3}L}{6}$ である。

35. (解説)波の位相差や干渉を考える際，距離を波長で割って波の数を考えるとわかりやすいときがある。また位相差は

位相差＝2π×波の数の差

である。

波の干渉条件も

強めあう条件：　波の数の差 $= 0,1,2,\square = m$　　$(m = 0,1,2,\square)$

弱め逢う条件：　波の数の差$=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\square = \frac{1}{2}(2m+1)$　　$(m = 0,1,2,\square)$

と考えてもよい。

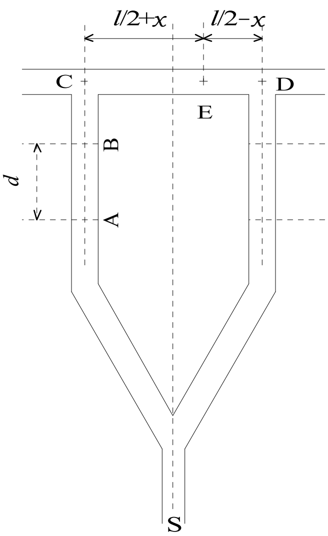
(1) 腹　…(答)　(理由)両方の水路からの距離が等しく，同位相となるので強めあって腹になる。

CD 間には左右に進む波で定常波が出来る。元の波の波長は，定常波の波長と同じでλである。波の振動数はfであるので，速さVは

$$V = f\lambda \quad \cdots(答)$$

(2)水深 h のときの波長をλ，波の速さをv，水深 h'のときの波長をλ'，波の速さをv'とすると，速さは水深の平方根に比例するので

$$\sqrt{\frac{h'}{h}} = \frac{v'}{v} = \frac{f\lambda'}{f\lambda} \qquad \therefore \quad \lambda' = \lambda\sqrt{\frac{h'}{h}}$$



移動した腹の位置を E とする。もともと位相差 0 の腹であるので，左の水路と右の水路を通ってきた波の数の差は 0 である。差がつくのは，距離の違う CE と DE，及び波長が違うことにより AB とそれに対象な右側の水路の A'B'である。ゆえに，波の数の差を考えて

$$\left(\frac{\mathrm{AB}}{\lambda'} + \frac{\mathrm{CE}}{\lambda}\right) - \left(\frac{\mathrm{A'B'}}{\lambda} + \frac{\mathrm{DE}}{\lambda}\right) = \frac{d}{\lambda\sqrt{\frac{h'}{h}}} + \frac{\frac{l}{2}+x}{\lambda} - \frac{d}{\lambda} - \frac{\frac{l}{2}-x}{\lambda} = 0$$

$$\therefore \quad \frac{h'}{h} = \left(\frac{d}{d-2x}\right)^2 \qquad \cdots(答)$$

(3)C→D に進む波の速さは　$V+v$　であるので波長 λ_1 は

$$\lambda_1 = \frac{V+v}{f} = \lambda + \frac{v}{f} \qquad \cdots(答)$$

同様に D→C に進む波の速さは　$V-v$　であるので波長 λ_2 は

$$\lambda_2 = \frac{V-v}{f} = \lambda - \frac{v}{f} \qquad \cdots(答)$$

また，点 O での位相差は，波の数の差に 2π をかければよいので

$$2\pi\left(\frac{\frac{l}{2}}{\lambda_2} - \frac{\frac{l}{2}}{\lambda_1}\right) = \pi l\left(\frac{f}{V-v} - \frac{f}{V+v}\right) = \frac{2\pi f l v}{V^2 - v^2} = \frac{2\pi f l v}{f^2\lambda^2 - v^2} \qquad \cdots(答)$$

(4)節になるには，位相差がπの奇数倍であればよい。また，v が小さいほど位相差は小さいので，vを最小にする位相差はπである。(3)の式より

$$\frac{2\pi f l v}{f^2\lambda^2 - v^2} = \pi \qquad \therefore \quad v = f\left(-l \pm \sqrt{l^2 + \lambda^2}\right)$$

$v > 0$ であるので　　$v = f\left(\sqrt{l^2+\lambda^2} - l\right)$　　…(答)