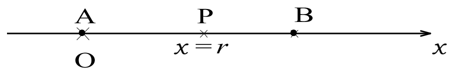
今日の目的:　①微分･積分を物理で使う。

②微分方程式を学ぶ

1.

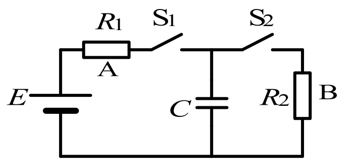
点電荷による電位を求めよう。電荷 $Q\,(Q>0)$をもつ点電荷 A が固定されている。電位の基準を無限の遠方として，点電荷から距離 r 離れた点 P の電位 V を求めよう。点 P に電荷 q（$q>0$）をもつ点電荷 B 置くとき，点電荷の B の静電エネルギー(静電気力による位置エネルギー)を U とする。U を q, V であらわすと U = [ア]…①となる。点電荷 B を無限遠方(位置エネルギーの基準)まで運ぶとき，静電気力のする仕事 W は U を用いて W = [イ]…②となる。ゆえに，点 P での電位 V を求めるためには，W を求めればよい。

点 A を原点として x 軸をとる。点 P ($x=r$)を出発した電荷 B がいま，任意の x にある(右図)。このとき電荷 B に働く静電気力は[ウ]である。ただしクーロンの法則の比例定数を k とする。この点より電荷 B を x 軸正方向に Δx だけ動かすとき，静電気力がする仕事 ΔW は，ΔW = [エ]…③となる。



ゆえに点 P から無限遠方まで電荷 B を運ぶとき，静電気力のする仕事 W は，③式を点 P から無限遠方まで積分すればよいので，W = [オ]となり，②式より点 P のおいた点電荷 B の静電エネルギーU = [カ]である。ゆえに①式より，点 P の電位 V = [キ]となる。

2.



右図のような起電力(電圧)E〔V〕の電池，抵抗値 R_1〔Ω〕, R_2〔Ω〕の抵抗 A,B, 容量 C〔F〕のコンデンサーとスイッチ S_1, S_2からなる回路がある。はじめ，コンデンサーに電荷は蓄えられていない。

スイッチ S_1 を閉じた。電荷の移動には時間がかかるので，スイッチを閉じた瞬間，コンデンサーに電荷は蓄えられていない。ゆえにコンデンサーの極板間の電圧は［ ア ］〔V〕である。したがって，抵抗 A の両端の電圧は［ イ ］〔V〕となり、流れる電流 I_0 はオームの法則より［ ウ ］〔A〕である。

スイッチを閉じた時刻を $t = 0$〔s〕とする。しばらく時間が経過し時刻 t で，コンデンサーに蓄えられた電荷が q〔C〕になった。このときコンデンサーの極板間の電圧は［ エ ］〔V〕であるので，抵抗 A の両端の電圧は［ オ ］〔V〕となり、流れる電流 i は

$i =$［ カ ］〔A〕　…①

となる。ここで，i と q の関係は時間を t として、$i = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$　…②　と表せるので，①式は

$\dfrac{\Delta q}{\Delta t} =$【カ】

となる。この式を，積分定数を K として解くと

$q =$［ キ ］ …③

となる。ここで $t = 0$ のとき，$q = 0$ であるので，③式より K を求め，K を③に代入すると

$q =$［ ク ］ …④

これより，時刻 t でのコンデンサーの極板間の電圧 V と，また②式より電流 i を求めると

$V =$［ ケ ］　，　$i =$［ コ ］ …⑤

となる。

問 1. 横軸に時刻 t, 縦軸に電流 i をとったグラフを書け。

次に，コンデンサーが十分に充電される間に抵抗 A で発生するジュール熱 W を求めてみよう。もちろん，充電後のコンデンサーのエネルギーと電池がした仕事より求められるが，ここでは，直接求めてみる。

時刻 t で電流 i が流れているとき，抵抗 A で，時間 Δt あたり発生するジュール熱 ΔW は

$\Delta W =$［ サ ］

④式の i を代入し，コンデンサーを充電する間で積分すると

$W =$［ シ ］

となる。

問 2. 次に十分時間が経過してからスイッチ S_1 を開いてから S_2 を閉じた。S_2 を閉じた瞬間を時刻 $t = 0$ とし，時刻 t で抵抗 B に流れる電流 i を求めよ。また，十分時間が経過するまでに抵抗 B で発生するジュール熱 W' を求めよ。ただし，$t = 0$ で，コンデンサーの極板間の電圧は E である。

1. (解説)点電荷のまわりの電位 V は

$$V=\frac{kQ}{r}$$

であるが，これを導いてみよう。

また，静電気力に限らず，ある場所 x で保存力 f と位置エネルギー U の関係は

$$f=-\frac{\Delta U}{\Delta x}$$　(本当は 3 次元で考えないといけないが)

である。これより，$f\Delta x$ が，Δx 動いたとき保存力のする仕事 ΔW であることも考慮して

$$f\Delta x=\Delta W=-\Delta U$$

つまり

保存力のする仕事 ＝ －位置エネルギーの変化量

である。

ア. 電荷 q が電位 V の位置にあるとき，静電エネルギー(静電気力による位置エネルギー)U は

$$U=qV \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

イ.　静電気力のする仕事 ＝ －静電気力による位置エネルギーの変化量

である。位置エネルギーは U から 0 へ変化するので

$$W=-(0-U)=U \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

ウ. クーロンの法則より，静電気力 f は

$$|f|=\frac{kQq}{x^2}$$

また向きは x 軸の正方向なので　$f=\dfrac{kQq}{x^2}$　…(答)

エ. Δx はごく微少距離であるので，この間，静電気力は一定であるとする。また，力の方向と変位の方向が同じなので仕事は正である。

$$\Delta W=f\Delta x=\frac{kQq}{x^2}\Delta x \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

オ. ΔW を dW，Δx を dx とする。③式を点 P から無限遠方まで積分すると，この区間での全仕事が求まる。

$$\int_P^{\text{無限遠方}} dW=\int_r^{\infty}\frac{kQq}{x^2}dx=kQq\left[-\frac{1}{x}\right]_r^{\infty}=\frac{kQq}{r} \quad \cdots(答)$$

カ. ②式より

$$U=W=\frac{kQq}{r} \quad \cdots(答)$$

キ. ①式より

$$V=\frac{U}{q}=\frac{kQ}{r} \quad \cdots(答)$$

2. (解説)電流は、単位時間あたりの電荷の通過量である。したがって、時間Δtで通過した電荷(この問題では、通過した電荷は、コンデンサーの極板の電荷の変化になる)Δqとすると、電流Iは

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}$$

とあらわされる。

抵抗値 R の抵抗の両端の電位差(電圧あるいは電圧降下ともいう)を V とすると、抵抗に流れる電流Iは　$V=IR$　である。これをオームの法則という。

ア. コンデンサーに蓄えられた電荷 Q〔C〕と、極板間の電圧 V〔V〕の関係は、容量を C〔F〕として　$Q=CV$　である。$Q=0$ であれば、$V=0$ である。　0〔V〕　…(答)

イ. 電池の負極側を基準とすると、図 1 の X の電位は E〔V〕、Y の電位は 0〔V〕である。ゆえに抵抗 A の両端の電位差は

E〔V〕　…(答)

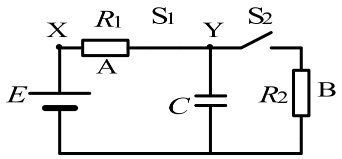


図 1

ウ. オームの法則より

$$I_0=\frac{E}{R_1}$$ 〔A〕　…(答)

エ. コンデンサーの公式より、極板間の電圧 V〔V〕は

$$V=\frac{q}{C}$$ 〔V〕　…(答)

オ. X の電位は E〔V〕、Y の電位は V〔V〕である。ゆえに抵抗 A の両端の電位差は

$$E-V=E-\frac{q}{C}$$ 〔V〕　…(答)

カ. オームの法則より

$$i=\frac{1}{R_1}\left(E-\frac{q}{C}\right)$$ 〔A〕　…(答)

キ. Δq を dq、Δt を dt とする。

$$\frac{dq}{dt}=\frac{1}{R_1}\left(E-\frac{q}{C}\right)=-\frac{1}{R_1C}(q-CE)$$

まず、左辺に q の項、右辺に t の項を集め、積分する。

$$\frac{dq}{q-CE}=-\frac{dt}{R_1C}$$

$$\int\frac{dq}{q-CE}=-\int\frac{dt}{R_1C}$$

ここで、q は CE を超えることがない、つまり $q<CE$ であることを考慮して

$$\log(CE-q)=-\frac{t}{R_1C}+K$$

$$q=CE-e^{-\frac{t}{R_1C}+K}$$

ここで、あらためて $K = e^K$　とおくと

$$q = CE - Ke^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

ク. ③式に $t = 0$、$q = 0$ を代入すると

$$0 = CE - Ke^{-\frac{0}{R_1 C}} \qquad \therefore \quad K = CE$$

これを再び③式に代入し

$$q = CE\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) \quad \cdots④ \quad \cdots(答)$$

ケ. ④式より

$$V = \frac{q}{C} = E\left(1 - e^{-\frac{t}{R_1 C}}\right) \quad \cdots(答)$$

コ. また、④式を時間 t で微分して

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{R_1 C}} \quad \cdots⑤ \quad \cdots(答)$$

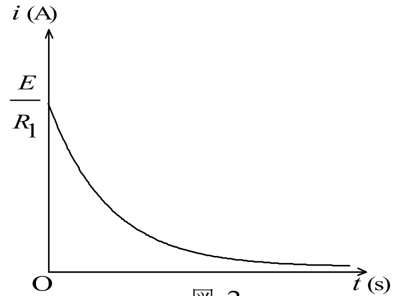


図 2

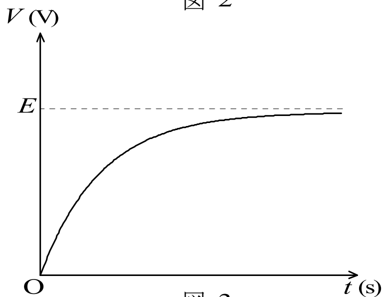


図 3

問 1.⑤式をグラフにすると図 2 となる。
(参考までに極板間の電圧 V をグラフにすると図 3 になる。)

サ. 抵抗の消費電力(単位時間あたり消費するエネルギー)は $i^2 R_1$ である。これがジュール熱になるので、時間 Δt では

$$\Delta W = i^2 R_1 \Delta t \quad \cdots(答)$$

シ. ④式を代入する。

$$\Delta W = \frac{E^2}{R_1} e^{-\frac{2t}{R_1 C}} \Delta t$$

これを $t = 0$ から $t =\ \infty$ まで積分すればよい。

$$W = \frac{E^2}{R_1}\int_0^{\infty} e^{-\frac{2t}{R_1 C}} dt = -\frac{CE^2}{2}\left[e^{-\frac{2t}{R_1 C}}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{2}CE^2 \quad \cdots(答)$$

(実際の入試でこのようにして求めることはまずない。通常はエネルギーの流れを考えて解く。

充電する間のコンデンサーの静電エネルギーの変化　$\Delta U = \frac{1}{2}CE^2 - 0 = \frac{1}{2}CE^2$

電池のした仕事　$W_E = CE \times E = CE^2$

ゆえに、抵抗で消費したエネルギー　＝　ジュール熱　W は

$$W_E = \Delta U + W \qquad \therefore \quad W = W_E - \Delta U = CE^2 - \frac{1}{2}CE^2 = \frac{1}{2}CE^2$$　)

問 2. 時刻 t のとき、コンデンサーに蓄えられた電荷が q であったとする。コンデンサーの極板間の電圧 V は　$V=\dfrac{q}{C}$　であり、これが抵抗 B の両端の電圧でもある。ゆえに流れる電流 i は

$$i=\frac{V}{R_2}=\frac{q}{R_2C}$$

ただし、図 4 の矢印の向きを正とする。この場合、電流 $i>0$ のとき、コンデンサーの電荷 q が減少し $\Delta q<0$ であることに注意すると、　$i=-\dfrac{dq}{dt}$

である。ゆえに

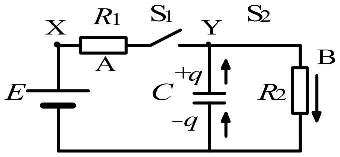


図 4

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{q}{R_2C}$$

これを解く。積分定数を K として

$$\frac{dq}{q}=-\frac{dt}{R_2C}$$

$$\int\frac{dq}{q}=-\int\frac{dt}{R_2C}$$

$$\log q=-\frac{t}{R_2C}+K$$

あらためて　$K=e^K$ として

$$q=Ke^{-\frac{t}{R_2C}}$$

ここで、$t=0$ で $q=CE$　であることより K を求めて

$$q=CEe^{-\frac{t}{R_2C}}$$

これを時間 t で微分して電流 i を求める。

$$i=-\frac{dq}{dt}=\frac{E}{R_2}e^{-\frac{t}{R_2C}} \qquad \cdots(\text{答})$$

また、抵抗 B で消費するエネルギー　＝　ジュール熱　W' は

$$W'=\int_0^\infty i^2R_2dt=\frac{E^2}{R_2}\int_0^\infty e^{-\frac{2t}{R_2C}}dt=-\frac{CE^2}{2}\left[e^{-\frac{2t}{R_2C}}\right]_0^\infty=\frac{1}{2}CE^2 \qquad \cdots(\text{答})$$

(もちろんこれもこんな解き方をしない。コンデンサーに蓄えられていた静電エネルギー $\dfrac{1}{2}CE^2$ がジュール熱に変わったと考える。)