今日の目的:　①微分方程式をもう一度
　　　　　　②近似について学ぶ

3.

質量mの雨滴が，初速度0で落下することを考える。落下する雨滴には速度と逆向きに速さに比例した空気の抵抗力が働く。ただし比例定数をkとする。重力加速度の大きさをgとし，雨滴は鉛直線上を落下するものとして以下の問いに答えよ。

(1)雨滴が落下を始めたときの鉛直下向きの加速度をa_0とする。a_0を求めよ。

(2)雨滴の速さがvになったとき，鉛直下向きの加速度をaとして，運動方程式をつくれ。またaを求めよ。

(3)雨滴の速さはやがて一定となる。そのときの速さv_0を求めよ。

(4)雨滴が落下を始めたときを時刻$t=0$とする。横軸に時刻t，縦軸にvを取ったグラフを書け。また，横軸に時刻t，縦軸にaを取ったグラフを書け。

(スペシャル)

(5)加速度aと速度vの関係は　$a=\dfrac{dv}{dt}$　である。この関係を使って(2)の運動方程式を書き直し，vをtの関数として求めよ。時刻$t=0$で，速度が0であることを利用せよ。

(6)aをtの関数として求めよ。

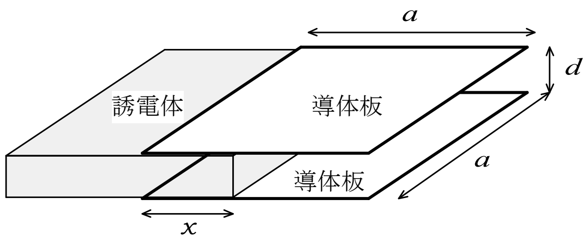
4.

1 辺の長さが a の正方形の薄い導体板を 2 枚，間隔 d で平行に並べたコンデンサーがある。このコンデンサーに，起電力 V_0 の電池を接続し，十分時間が経過した後，電池を切り離した。空気の誘電率を ε_0 とする。以下の問いに答えよ。

(1)このコンデンサーの容量 C_0 を求めよ。

(2)コンデンサーに蓄えられた電荷を，C_0 を用いてあらわせ。

次に，右図のように，導体板と同型で厚さが d の比誘電率 ε_r の誘電体を，導体板と端をそろえて，ゆっくり挿入する。いま，誘電体の挿入されている長さが x であるとする。



(3)このときのコンデンサーの容量を，C_0 を用いてあらわせ。

(4)コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを，C_0 を用いてあらわせ。

この状態からさらに Δx だけ誘電体を挿入する。ただし，Δx は x, a に比べて十分に小さいものとする。

(5)コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーを，C_0 を用いてあらわせ。

(6)誘電体を Δx だけ動かしたとき，コンデンサーに蓄えられた静電エネルギーの変化量を求めよ。ただし，$y \ll 1$ のとき使える近似式

$$(1+y)^a \fallingdotseq 1+ay$$

を用いよ。

(7)誘電体を Δx だけ動かす間，コンデンサーから誘電体に働く力は一定であるとして，この力の大きさと向きを求めよ。

3. (解説)物体の変位 x, 速度 v, 加速度 a には, 時間 t として

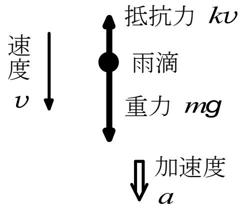
$$v=\frac{dx}{dt} \quad , \quad a=\frac{dv}{dt}$$

の関係がある。

簡単な微分方程式では, 変数ごとに左辺, 右辺に分けて積分すればよい。また, 初期条件より積分定数を求める。

(1)雨滴には重力のみが働く。鉛直下向きを正として

$$ma_0=mg \qquad \therefore \quad a_0=g \qquad \cdots(答)$$



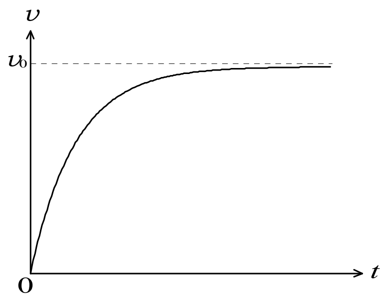
(2)雨滴には, 右図のように力が働くので

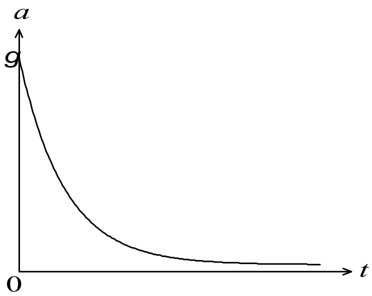
$$ma=mg-kv \qquad \therefore \quad a=g-\frac{kv}{m} \qquad \cdots(答)$$

(3)重力と抵抗力がつりあえば等速になる。

$$mg-kv_0=0 \qquad \therefore \quad v_0=\frac{mg}{k} \qquad \cdots(答)$$

(4)(1)～(3)の結果よりわかるように, 雨滴の速度は増加していくが, 加速度(速度の増え方)は徐々に減り, やがて速度が一定(加速度は 0)になる。これらの概略を図にすると, 下図となる。





(5)(2)の式を書き直して, 整理する。

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{kv}{m}$$

$$\frac{dv}{v-\frac{mg}{k}}=-\frac{k}{m}dt$$

両辺を積分する。$v<\dfrac{mg}{k}$ であることも考慮し, C を定数として

$$\log\left(\frac{mg}{k}-v\right)=-\frac{k}{m}t+C$$

$$\frac{mg}{k}-v=C'e^{-\frac{kt}{m}} \qquad ただし \quad C'=e^{C}$$

ここで, 時刻 $t=0$ で, $v=0$ であるのでこれより C'を求める。

$$\frac{mg}{k}-0=C'e^{-\frac{k\times 0}{m}} \qquad \therefore \quad C'=\frac{mg}{k}$$

ゆえに, 時刻 t のときの速度 v は　$v=\dfrac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{kt}{m}}\right)$　$\cdots$(答)

(6)両辺を t で微分して加速度 a を求める。

$$a=\frac{dv}{dt}=ge^{-\frac{kt}{m}} \qquad \cdots(答)$$

2. (解説)誘電体を途中まで挿入したコンデンサーは，誘電体のある部分とない部分の 2 つのコンデンサーの並列と考えればよい。

この問題では，電池は切り離されているので，誘電体を挿入する際，外部から与えた仕事が静電エネルギーの変化となる。外部からの仕事が負になるとはどういうことかよく考えよう。

近似式をうまく使うためには，“近似の目的を持つこと”が大切である。

この問題では，エネルギーの差を求めるため，複雑な分母を簡単にすることが目的である。

そして，まず 1 より十分に小さい部分を作り出すこと。

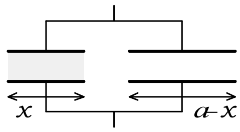
また，解答中で説明するが微分をうまく使ってやるのも有効な方法である。

(1)極板の面積 a^2 であるので，容量の公式より

$$C_0=\frac{\varepsilon_0 a^2}{d} \qquad \cdots① \quad \cdots(答)$$

(2)電荷 Q_0 は　$Q_0=C_0V_0$ 　$\cdots$(答)

(3)誘電体のある部分とない部分に分けて，それらの並列であると考える。



$$C=\frac{\varepsilon_r\varepsilon_0 ax}{d}+\frac{\varepsilon_0 a(a-x)}{d}=\frac{\varepsilon_0 a}{d}\{a+(\varepsilon_r-1)x\}$$

①式より

$$C=\left\{\frac{a+(\varepsilon_r-1)x}{a}\right\}C_0 \qquad \cdots(答)$$

(4)電荷は Q_0 のままであるので，静電エネルギー U は

$$U=\frac{Q_0^2}{2C}=\frac{(C_0V_0)^2}{2C}=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}} \qquad \cdots② \quad \cdots(答)$$

(5)②式で，x を $x+\Delta x$ と置き換えればよい。静電エネルギー U' は

$$U'=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)(x+\Delta x)\}} \qquad \cdots(答)$$

(6)内部エネルギーの変化量 ΔU は　$\Delta U=U'-U$ であるが，そのままでは分母が不揃いで計算がやりにくい。そこで，U' に対して，近似式を使う。

まず，1 より小さい項を作るため，Δx を，x や a で割る項を作る。

$$U'=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)(x+\Delta x)\}}=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x+(\varepsilon_r-1)\Delta x\}}$$

$$=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}\left\{1+\dfrac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}\right\}}$$

ここで $\dfrac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}$ が，1 より小さいと考えてよい。近似を使って

$$U'=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}\left\{1+\dfrac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}\right\}}=\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}}\left\{1+\frac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}\right\}^{-1}$$

$$\fallingdotseq\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}}\left\{1-\frac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}\right\}$$

となる。これより ΔU を求める。

$$\Delta U = U' - U \fallingdotseq \frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}}\left\{1-\frac{(\varepsilon_r-1)\Delta x}{a+(\varepsilon_r-1)x}\right\}-\frac{aC_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}}$$

$$= -\frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2}\Delta x = -\frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2}\Delta x \qquad \cdots(答)$$

(7)誘電体をゆっくり動かすので，誘電体がコンデンサーから受ける力と外力がつりあっている。

外力のする仕事 $W = \Delta U < 0$ であるので，外力は Δx と逆向きである。外力の大きさを f とすると

$$W = -f\Delta x = -\frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2}\Delta x \qquad \therefore \quad f = \frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2} \qquad \cdots(答)$$

コンデンサーからの力は同じ大きさで逆向きなので，誘電体を引き込む向きに働く。

(スペシャル)

近似について考えよう。(6)で静電エネルギーの変化量 ΔU を求めたが，微分を利用して求めることが出来る。

②式より静電エネルギー U は，x の関数である。つまり，

$$U = f(x)$$

x を微少量 dx 変化させたとき，U の変化量 dU とすると，$f(x)$ を x で微分して

$$\frac{dU}{dx} = f'(x) \qquad \therefore \quad dU = f'(x)dx$$

つまり，dU を求めるためには，②式を x で微分すればよい。

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2} \qquad \therefore \quad dU = -\frac{a(\varepsilon_r-1)C_0V_0^2}{2\{a+(\varepsilon_r-1)x\}^2}dx$$