

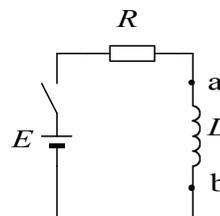
今日の目的: ①微分方程式をもう一度

②三角関数の近似について学ぶ

③微分の意味を考える

5.

起電力 E の電池, 抵抗値 R の抵抗, 自己インダクタンス L のコイルとスイッチを用いて右図のような回路をつくった。始めスイッチは開かれている。



時刻 $t = 0$ でスイッチを閉じた。以下の間に答えよ。ただし, 電流はコイルに $a \rightarrow b$ の向きに流れる時を正とする。

- (1) スwitchを閉じた直後, コイルに流れる電流を求めよ。
- (2) 十分に時間が経過した後, 電流は一定値となる。このときの電流を求めよ。

電流が一定になる前の任意の時刻 t について考える。このときの電流を I とし, 時間 Δt の間の電流の変化量が ΔI であったとする。

- (3) 図の閉回路に対してキルヒホッフの法則の式をつくれ。
- (4) (3)の微分方程式を解いて, I を t の関数で表せ。
- (5) a 点の電位 V_a を t の関数で表せ。
- (6) 時刻 $t = 0$ から電流が一定になるまでの I と V_a の変化の様子を, それぞれ横軸に t をとって描け。

6.

図1のように, 磁束密度 B の一様な磁場中に, 長方形コイル $abcd$ があり, 磁場と垂直な回転軸を中心に, 一定の角速度 ω で回転させる。辺 $ab = cd = l$, $ad = bc = 2r$ である。 a は集電子 Q に, d は P に接続されている。図2は集電子側から見た図である。図2中の矢印 P は, 面 $abcd$ に立てた垂線で, P が磁場の方向と一致する時刻を $t = 0$ とし, 時刻 t の状態を示している。

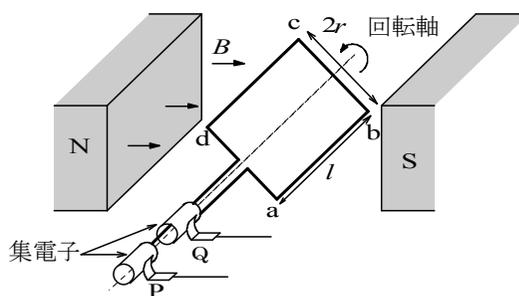


図 1

- (1) 時刻 t のとき, コイルを貫く磁束 Φ を求めよ。
- (2) 時刻 t より微小時間 Δt が経過したとき, コイルを貫く磁束が $\Phi + \Delta\Phi$ となった。 $\Delta\Phi$ を求めよ。ただし, θ が十分小さいとき, $\sin\theta \doteq \theta$, $\cos\theta \doteq 1$ と近似してよいことを利用せよ。
- (3) 時刻 t で回路に発生している誘導起電力を求めよ。ただし, $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$ の向きの起電力を正とする。

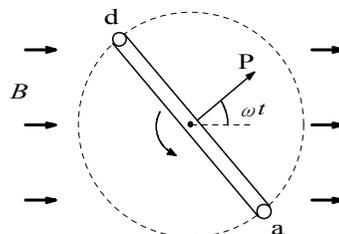
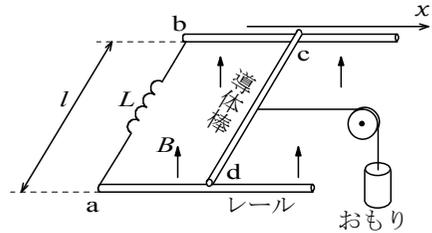


図 2

7.

以下の文の[ア]～[コ]に適当な式を求めよ。また問1に答えよ。

右図のように平行な2本の導体レールが水平に間隔 l [m] で置かれている。ab 間には自己インダクタンス L [H] のコイルが接続されており、導体レールの間には鉛直上向きに磁束密度 B [T] の磁場がかかっている。質量 m [kg] の導体棒 cd がレールに垂直に置かれ、軽い滑車にかけられた軽い糸で質量 m [kg] のおもりとつながれている。導体棒とレールの間に摩擦はないものとし、重力加速度の大きさを g [m/s²] とする。また、導体棒に $c \rightarrow d$ の向きに流れる電流を正とする。



はじめに糸を張った状態で、導体棒とおもりとを手で静止させる。この位置を原点に、図のように水平にレールに平行に x 軸をとる。この状態から静かに手をはなす。このときを時刻 t [s] = 0 とする。 $t = 0$ で導体棒に流れる電流は 0 [A] なので、導体棒の加速度は[ア]である。

導体棒が時刻 t ではじめて x 軸正方向に速さ v [m/s] になった時を考える。このとき導体棒に生じる起電力は[イ]である。ただし、起電力の正の向きは電流の正の向きと同じとする。

また、この瞬間の電流を I [A] とし、電流の時間変化率を $\frac{\Delta I}{\Delta t}$ とする。コイル、レール、導体棒からなる回路に、キルヒホッフの法則より式をつくると

$$[\text{ウ}] \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、速度 v は $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ であるので、これを①式に代入して ΔI を求めると

$$\Delta I = [\text{エ}] \quad \dots \textcircled{2}$$

となり、 I と x の変化量が比例していることを示している。 $x = 0$ で $I = 0$ であることを考えて、②式より I を x で表すと

$$I = [\text{オ}] \quad \dots \textcircled{3}$$

である。

このとき導体棒に磁場から働く力は[カ]であるので、導体棒とおもりの加速度を a [m/s²]、糸の張力を T [N] として運動方程式をつくり、 T を消去して a を求めると

$$a = [\text{キ}] \quad \dots \textcircled{4}$$

となるので、導体棒は単振動をすることがわかる。単振動の中心は $x = [\text{ク}]$ 、周期は[ケ]、振幅は[コ]である。

問1. 時刻 $t = 0$ から1周期の間、電流 I の変化を横軸に時間をとってグラフにせよ。

5. (解説) コイルに流れる電流が変化するとき、自己誘導によりコイルに起電力 V が発生する。起電力の向きは電流の正の向きと同じ向きを正として

$$V = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$$

である。この問題ではコイルに流れる電流は、 $a \rightarrow b$ の向きを正とするので、コイルの起電力も $a \rightarrow b$ の向きを正とする。つまり、 b が高電位の時、起電力は正である。

キルヒホッフの法則は、任意の閉回路で

(起電力の和) = (電圧降下の和)

である。コイルの自己誘導起電力も“起電力”であるので、電池と同じ扱いとなる。

- (1) コイルに流れる電流は、急に不連続に変化できないので $0A$ …(答)
 (2) 十分に時間が経過し、電流が一定となるとコイルは自己誘導を起こさず、コイルの起電力は $0V$ である。そのときの電流を I_0 とすると

$$E = RI_0 \quad \therefore \quad I_0 = \frac{E}{R} \quad \dots(\text{答})$$

- (3) コイルの誘導起電力 V は、電流の正の向きと同じに $a \rightarrow b$ 向きを正 (b が高電位の時正)

として $V = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ である。キルヒホッフの法則より

$$E + V = RI$$

$$E - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = RI \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots(\text{答})$$

- (4) $\Delta I \rightarrow dI, \Delta t \rightarrow dt$ として①式を変形して

$$E - L \frac{dI}{dt} = RI$$

$$dI = -\frac{R}{L} \left(I - \frac{E}{R} \right) dt$$

$$\frac{dI}{I - \frac{E}{R}} = -\frac{R}{L} dt \quad \dots \textcircled{2}$$

$I < \frac{E}{R}$ も考慮して②式を積分する。積分定数を C として

$$\log \left(\frac{E}{R} - I \right) = -\frac{R}{L} t + C$$

$$I = \frac{E}{R} - C' e^{-\frac{R}{L} t} \quad \dots \textcircled{3} \quad (\text{ただし } C' = e^C)$$

ここで、 $t = 0$ で、 $I = 0$ であるので、これを③式に代入して C' を求める。

$$0 = \frac{E}{R} - C' e^{-\frac{R}{L} \times 0} \quad \therefore \quad C' = \frac{E}{R}$$

再び③式に代入して

$$I = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L} t} \right) \quad \dots \textcircled{4} \quad \dots(\text{答})$$

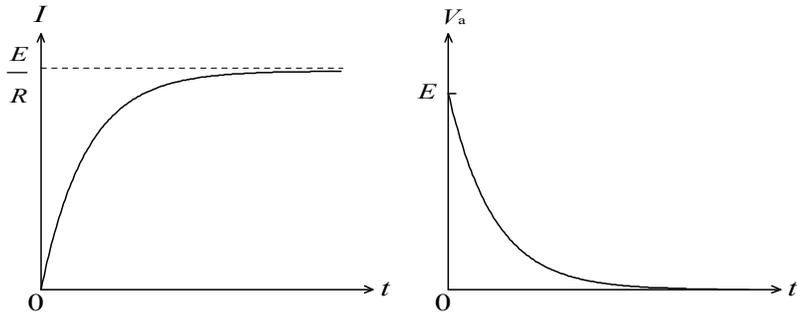
($t \rightarrow \infty$ で、 $I = \frac{E}{R}$ となり、(2)の結果と一致する。)

$$(5) \quad V_a = -V = L \frac{dI}{dt}$$

である。④式を t で微分して

$$V_a = L \frac{dI}{dt} = E e^{-\frac{R}{L}t} \quad \dots(5) \quad \dots(\text{答})$$

(6)④, ⑤式をグラフにする。



6. (解説)磁場に発生する起電力は、磁場を貫く磁束の時間変化を求めればよい。

三角関数の近似であるが、 θ [rad]が十分に小さいとき

$$\sin \theta \doteq \theta, \quad \cos \theta \doteq 1, \quad \tan \theta \doteq \theta$$

また

$$\sin \theta \doteq \tan \theta$$

となる。まれにであるが、余弦関数は θ の 2 次の項までとって

$$\cos \theta \doteq 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

とすることがある。

(2), (3)では結局、三角関数を時間 t で微分しているのと同じ事である。

(1)磁場の方向から見たコイルの面積は $2rl \cos \omega t$ であるので

$$\Phi = 2Brl \cos \omega t \quad \dots(1) \quad \dots(\text{答})$$

(2)時刻 $t + \Delta t$ なので

$$\Phi + \Delta \Phi = 2Brl \cos \omega(t + \Delta t)$$

加法定理より

$$\Phi + \Delta \Phi = 2Brl(\cos \omega t \cdot \cos \omega \Delta t - \sin \omega t \cdot \sin \omega \Delta t)$$

ここで、 $\omega \Delta t$ は十分に小さいと考えてよいので

$$\sin \omega \Delta t \doteq \omega \Delta t, \quad \cos \omega \Delta t \doteq 1$$

と近似することで

$$\Phi + \Delta \Phi \doteq 2Brl(\cos \omega t - \omega \Delta t \sin \omega t)$$

①式も用いて

$$\Delta \Phi = (\Phi + \Delta \Phi) - \Phi \doteq -2Brl \omega \sin \omega t \cdot \Delta t \quad \dots(2) \quad \dots(\text{答})$$

(3)電磁誘導によりコイルに発生する起電力 V は、磁場の向きと起電力の向きが正しく決められているので公式のまま

$$V = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = 2Brl \omega \sin \omega t$$

向きに自信がなければ、大きさ向きを別々に考えればよい。

(参考: $V = -\frac{d\Phi}{dt}$ なので、①式を時間 t で微分したものとなる)

7. (解答)ア. 導体棒とおもりの加速度を a_0 , 糸の張力を T_0 として, 導体棒とおもりの運動方程式をつくる。電流が 0 なので, 導体棒に磁場からの力は働かない。

$$\text{導体棒: } ma_0 = T_0$$

$$\text{おもり: } ma_0 = mg - T_0$$

$$\text{これを解いて } a_0 = \frac{g}{2} \quad \dots(\text{答})$$

イ. 速度が正の時, 右手の法則より起電力 V の向きは $c \rightarrow d$ なので正である。ゆえに

$$V = vBl \quad \dots(\text{答})$$

ウ. この回路中に電圧降下はない。また, コイルの自己誘導起電力は $-L \frac{\Delta I}{\Delta t}$ であるので閉

回路に対するキルヒホッフの法則より

$$V - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad \therefore \quad vBl - L \frac{\Delta I}{\Delta t} = 0 \quad \dots\text{①} \quad \dots(\text{答})$$

エ. ①式に $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ を代入し, ΔI について解く。

$$\Delta I = \frac{Bl}{L} \Delta x \quad \dots\text{②} \quad \dots(\text{答})$$

オ. I と x の変化量が比例するということは, I は x の 1 次関数で, $x = 0$ のとき $I = 0$ であることを考慮して

$$I = \frac{Bl}{L} x \quad \dots\text{③}$$

カ. 電流 $I > 0$ ($c \rightarrow d$) であるので, フレミングの左手の法則より, 磁場からの力 F は x 軸負の方向である。ゆえに

$$F = -IBl = -\frac{B^2 l^2}{L} x \quad \dots(\text{答})$$

キ. 運動方程式は

$$\text{導体棒: } ma = -\frac{B^2 l^2}{L} x - T$$

$$\text{おもり: } ma = mg - T$$

T を消去して

$$a = -\frac{B^2 l^2}{2mL} x + \frac{g}{2} \quad \dots\text{④} \quad \dots(\text{答})$$

ク. ④式は, 単振動の加速度であることを示している。単振動の中心は $a = 0$ の位置なので, 座標を x_0 として

$$a = -\frac{B^2 l^2}{2mL} x_0 + \frac{g}{2} = 0 \quad \therefore \quad x_0 = \frac{mgL}{B^2 l^2} \quad \dots(\text{答})$$

ケ. 単振動の角振動数を ω とすると

$$\omega = \sqrt{\frac{B^2 l^2}{2mL}} = \frac{Bl}{\sqrt{2mL}}$$

周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{Bl} \sqrt{2mL} \quad \dots(\text{答})$$

コ. $x = 0$ のとき $v = 0$ で単振動の端なので振幅 A は $A = x_0 - 0 = \frac{mgL}{B^2 l^2} \quad \dots(\text{答})$

問 1. 単振動の角振動数を ω とすると, 導体棒の変位 x は

$$x = x_0 - A \cos \omega t = \frac{mgL}{B^2 l^2} (1 - \cos \omega t)$$

③式より

$$I = \frac{Bl}{L} x = \frac{mg}{Bl} (1 - \cos \omega t)$$

となる。これをグラフにする。

