今日の目的:　①気体のする仕事を求める。カルノーサイクルについて学ぶ
②多数の三角関数の和について
③回折格子の暗くなる方向

8.

図 1 のように側面を断熱材で囲まれたシリンダーに，断熱材で出来たピストンがはめ込まれ物質量 n モルの理想気体が封入されている。シリンダーの底部は熱を良く通す素材で出来ており，温度がそれぞれ T_1, T_2 の熱源($T_1>T_2$)，もしくは断熱材をつけることが出来る。図 1 は，温度 T_1 の熱源をつけた状態を示している。はじめ気体を体積 V_A，温度 T_1 の状態 A から以下の過程①～④のように，A→B→C→D→A と変化させた。

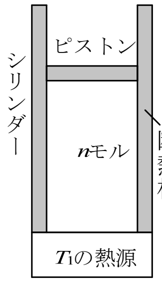

図 1

①底部に温度 T_1 の熱源をつけ，気体の温度を T_1 に保ったまま体積 V_B の状態 B まで膨張させた。

②熱源を外して断熱材をつけ，断熱的に温度 T_2，体積 V_C の状態 C まで膨張させた。

③断熱材を外して温度 T_2 の熱源をつけ，気体の温度を T_2 に保ったまま体積 V_D の状態 D まで圧縮した。

④熱源を外して断熱材をつけ，断熱的に体積を V_A 状態 A まで圧縮した。

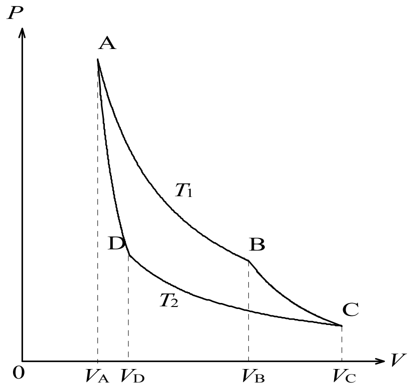

図 2

なお，これらの変化を縦軸に圧力 P，横軸に体積 V をとってグラフにすると図 2 のようになる。この気体の定積モル比熱を C_v，気体定数を R として以下の問に答えよ。

(1)①の変化の際，気体のした仕事 W_{AB} と気体に与えた熱 Q_{AB} の関係を求めよ。

(2)気体の圧力が P のとき，微少体積 ΔV だけ変化するときの気体のする仕事 ΔW は

$$\Delta W = P\Delta V$$

で与えられる。①の変化の際，温度が T_1 で一定であることを利用して状態 A から状態 B へ変化する途中で任意の体積 V から ΔV だけ膨張する間の仕事 ΔW を V と ΔV で表せ。

(3)x, y を変数，K を定数としたとき $dy = \dfrac{K}{x}dx$ を x_1 から x_2 まで積分すると

$$y = K\log\frac{x_2}{x_1}$$

となる。これを利用して，W_{AB} を求めよ。

(4)②の変化の際，気体のした仕事 W_{BC} を求めよ。

(5)同様に，③，④の変化の際，気体のした仕事 W_{CD}, W_{DA} 求めよ。

(6) A→B→C→D→A で気体がする仕事の合計を求めよ。

(7)②，③の断熱変化ではある定数を γ(比熱比)として，圧力 P，体積 V の間に

$$PV^{\gamma} = 一定$$

の関係がある。これを利用して $\dfrac{V_B}{V_A}$ と $\dfrac{V_C}{V_D}$ の関係を求めよ。

(7)この熱機関の効率を求めよ。

9.

以下の[1]～[10]の空欄に適当な式，数値を入れよ。

格子間隔dの回折格子がある。波長λ，角振動数ωの単色光を入射させたとき，明るい回折光が見える方向の，入射方向からの角θの満たす条件は，mを整数として[1]である。

さて，回折光が暗くなる方向を考えよう。回折格子は一般に，間隔 d で多数のスリットが並んでいると考えることが出来る。この場合，隣り合うスリット同士が干渉により弱めあっても，さらに隣のスリットと弱めあうと限らないので，話が複雑になる。そこで，まずスリットが 2 つだけの回折格子を考える。この回折格子で 0 次の明るい回折光($\theta=0$)と 1 次の回折光の間で暗くなる条件を考える。

図 1 で，2 つのスリットを通過してθの方向に進む光の位相差αは，$\alpha=$ [2]である。0 次の回折光では$\alpha=0$であり，1 次の回折光では$\alpha=2\pi$である。したがって$0<\alpha<2\pi$の範囲で，光が弱めあうこと方向を考える。

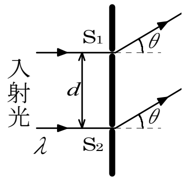

図 1

図 1 のスリット S_1を通過した光の時刻 t での変位 y_1が$y_1=A\sin\omega t$とすると，S_2を通過した光の時刻tでの変位 y_2はαを用いて

y_2 ＝[3]

となる。y_1とy_2が打ち消しあうためには，常に$y_1+y_2=0$が成り立つので，α ＝[4]のときである。つまり，$0<\alpha<2\pi$の範囲で弱めあう方向は，1 つだけ存在することになる。

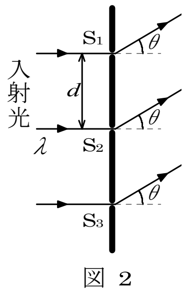

図 2

次に，図 2 のようにスリットが 3 つある場合を考える。スリット S_1とS_2を通過してθの方向に進む光の位相差αは，$\alpha=$【2】であり，S_2とS_3を通過した光の位相差も同じである。S_1を通過した光の時刻 t での変位 y_1 を $y_1=A\sin\omega t$とすると，S_2，S_3通過した光の変位 y_2，y_3はそれぞれ α を用いて

y_2 ＝[5] ，　y_3 ＝[6]

となる。これらの光が弱めあうためには$y_1+y_2+y_3=0$である必要であるが，以下のように図を使って考えよう。図 3 はこれら光の振動 y_1，y_2，y_3 をベクトル$\overrightarrow{A_1}$，$\overrightarrow{A_2}$，$\overrightarrow{A_3}$として表したものである。ベクトルの長さが振幅Aを表し，またy_1を基準としてy_2，y_3，の位相のずれをベクトルの方向で表す。$y_1+y_2+y_3$は，これらの 3 つのベクトルの和になることがわかっているので，0 となるαを$0<\alpha<2\pi$の範囲で全てあげると，α ＝[7]で，弱めあう方向が[8]箇所あることになる。

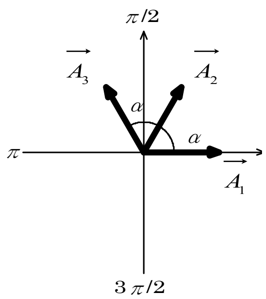

図 3

同様に考えてスリットが 4 つの場合は，α ＝[9]の[10]箇所で弱めあう。また，スリットの数が N 個の場合は，弱めあう方向は[11]箇所になる。

一般に回折格子ではスリットは非常に多数あるので，明るい方向以外ではほとんどが暗くなる方向が多数あることになり，明線のみが目立つことになる。

8. (解説)圧力 P, 体積 V の状態から気体を微少体積 ΔV だけ変化させたとき, 気体のする仕事 ΔW は

$$\Delta W = P\Delta V$$

となる。気体のする仕事 W はこれを積分すればよい。

$$W = \int PdV$$

である。等温変化では温度が一定であるので, 状態方程式より P を V で表すことで簡単に積分できる。

　この問題のように　　等温膨張⇒断熱膨張⇒等温圧縮⇒断熱圧縮

をして元に戻るサイクルを“カルノーサイクル”という。

熱機関の中で, カルノーサイクルの効率が最大となる。

(1)等温変化であるので, 内部エネルギーは変化しない。熱力学第 1 法則より

$$Q_{AB} = W_{AB} \quad \cdots(答)$$

(2)気体の状態方程式より圧力 P は　$PV = nRT_1 \quad \therefore \quad P = \dfrac{nRT_1}{V}$

これより仕事は　$\Delta W = P\Delta V = \dfrac{nRT_1}{V}\Delta V \quad \cdots①　\cdots(答)$

(3)①式を V_{A} から V_{B} まで積分すると状態 A から B 間での仕事 W_{AB} が求まる。。問題文中にあるように結果は

$$W_{AB} = nRT_1 \log\frac{V_B}{V_A} \quad \cdots(答)$$

$$\left(W_{AB} = nRT_1\int_{V_A}^{V_B}\frac{dV}{V} = nRT_1\left[\log V\right]_{V_A}^{V_B} = nRT_1\log\frac{V_B}{V_A} \right)$$

(4)断熱変化であるので, 状態 B から C への変化で内部エネルギーの変化量を ΔU_{BC} として

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = -nC_V(T_2 - T_1) = nC_V(T_1 - T_2) \quad \cdots(答)$$

(5)状態 C から D での仕事 W_{CD} は, (2), (3)と同様に考えて

$$W_{CD} = nRT_2 \log\frac{V_D}{V_C} \quad \cdots(答)$$

状態 D から A での仕事 W_{DA} は, (3)と同様に考えて

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -nC_V(T_1 - T_2) \quad \cdots(答)$$

(8)1 サイクルでする仕事 W は

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = nRT_1\log\frac{V_B}{V_A} + nC_V(T_1 - T_2) + nRT_2\log\frac{V_D}{V_C} - nC_V(T_1 - T_2)$$

$$= nR\left(T_1\log\frac{V_B}{V_A} - T_2\log\frac{V_C}{V_D}\right) \quad \cdots(答)$$

(7)状態方程式より $P = \dfrac{nRT}{V}$ であるので, 問題の式に代入して

$$TV^{\gamma-1} = 一定$$

となる。

状態 A→B ： $T_1V_B^{\gamma-1} = T_2V_C^{\gamma-1} \quad \cdots②$

状態 D→A ： $T_1V_A^{\gamma-1} = T_2V_D^{\gamma-1} \quad \cdots③$

②÷③より　$\dfrac{V_B}{V_A} = \dfrac{V_C}{V_D} \quad \cdots④　\cdots(答)$

(8)気体に熱を与えた過程は，状態A→Bの変化だけである。(状態C→Dでは，熱を放出している)ゆえに，熱機関の効率 e は

$$e=\frac{W}{Q_{AB}}=\frac{W}{W_{AB}}=\frac{T_1\log\frac{V_B}{V_A}-T_2\log\frac{V_C}{V_D}}{T_1\log\frac{V_B}{V_A}}$$

④式を用いて整理すると　$e=1-\dfrac{T_2}{T_1}$　…(答)

9. (解説)格子間隔 d の回折格子に波長 λ の光を入射させたとき，明るい回折光が見られる方向 θ は m を整数として

$$d\sin\theta=m\lambda$$

となるが，暗くなる方向を考えることはやや難しい。この問題にあるように，隣り合う明線の間に多数あることになる。例えば，スリットの数が 3 個の場合，隣り合う明線間に暗くなる方向は 2 方向ある。この間の光の強度を横軸に θ をとって概略を描くと図 1 のようになる。
スリットが多数になると，暗くなる方向も多くなって図 2 のようになり，明るい方向だけが際だつことになる。回折格子の特徴といえる。

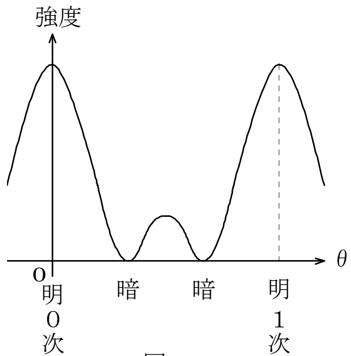

図 1

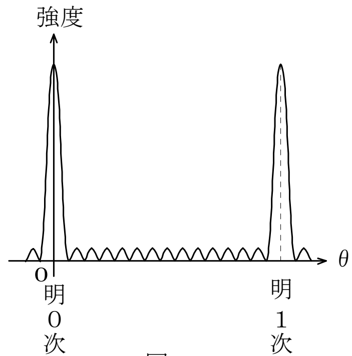

図 2

位相の異なる三角関数を足し算するときは，この問題のようにベクトルのように計算すると便利である。(交流のところでやったね)

(解答)

[1]明るくなる条件は　$d\sin\theta=m\lambda$　…(答)

[2]光路差は $d\sin\theta$ である。位相差(＝2π×波の数)に直すと

$$\alpha=\frac{2\pi d\sin\theta}{\lambda}$$　…(答)

(参考：$\alpha=0,\pm2\pi,\pm4\pi\cdots=\pm2m\pi$　となるとき，明るくなる)

[3]S_2 を通過した光は，S_1 を通過した光よりこの方向では α だけ位相が進んでいると考えられるので

$$y_2=A\sin(\omega t+\alpha)$$　…(答)

[4]　$y_1+y_2=A\sin\omega t+A\sin(\omega t+\alpha)=0$

が常に成り立つためには　$\alpha=\pi$　…(答)

[5]　$y_2=A\sin(\omega t+\alpha)$　…(答)

[6]S_3 を通過した光は，S_1 を通過した光よりこの方向では 2α だけ位相が進んでいると考えられるので

$$y_3=A\sin(\omega t+2\alpha)$$　…(答)

[7]　$y_1 + y_2 = A\sin\omega t + A\sin(\omega t + \alpha) + A\sin(\omega t + 2\alpha) = 0$

が常に成り立つ α を考える。問題にあるようにベクトルで考えると

図 3 のように $\alpha = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき（$2\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$）と，図 4 のように $\alpha = \dfrac{4\pi}{3}$ のとき（$2\alpha = \dfrac{8\pi}{3}$）である。

$\alpha = \dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{4\pi}{3}$　　…(答)

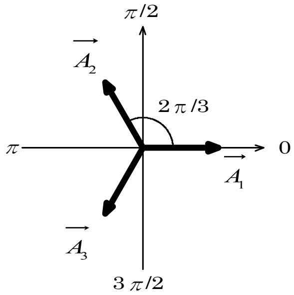

図 3

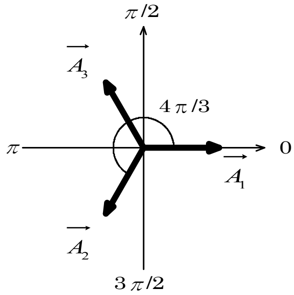

図 4

[8]　2 方向　　2　　…(答)

[9]同様に考えて，図 5～7 の場合の 3 通りになる。

図 5 のように $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$ のとき（$2\alpha = \pi$，$3\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$）

図 6 のように $\alpha = \pi$ のとき（$2\alpha = 2\pi$，$3\alpha = 3\pi$）

図 7 のように $\alpha = \dfrac{3\pi}{2}$ のとき（$2\alpha = 3\pi$，$3\alpha = \dfrac{9\pi}{2}$）

$\alpha = \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}$　　…(答)

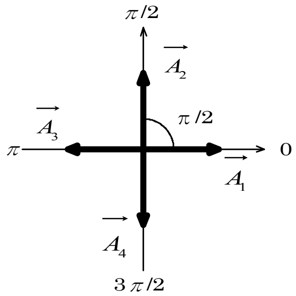

図 5

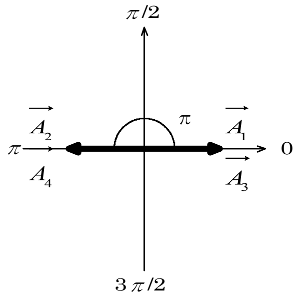

図 6

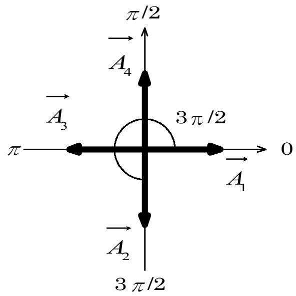

図 7

[10]　3 方向　　3　　…(答)

[11]以上の考察より，スリットの数が N のとき，弱めあう方向は　　$N-1$　　…(答)