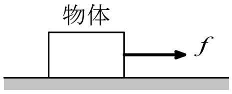
今日の目的:　①物理と微分・積分について

②微分方程式について学ぶ

③近似を学ぶ。

10.

以下の文を読み，[ア]～[ク]の空欄に適当な式をいれよ。



物体に一定の大きさの力を加えたときの，物体の運動について考えよう。右図のように，なめらかな水平面上で質量 m の物体に水平に一定の大きさ f の力を加えると，物体は動きはじめる。物体が動き始めた時刻を $t=0$ とする。その後も力を加え続け，時刻 t で物体の速度が v になった。そのときの物体の運動量は[ア]である。このときから，微少な時間 Δt の間に物体が受けた力積は[イ]であるので，時間 Δt の間の速度の変化 Δv は

$\Delta v=$ [ウ]$\times\Delta t$　　…①

となる。時刻 $t=0$ で $v=0$ であることを考慮すると，①式より時刻 t での速度 v は

$v=$ [エ]　　…②

となる。また，物体の加速度 a は，Δv と Δt を用いて $a=$ [オ] と表せるので，①式より

$a=$ [カ]

である。

時刻 t から Δt の間の変位 Δx は，この間の速度が変わらないとして，②式より m, f, t を用いて

$\Delta x=$ [キ]$\times\Delta t$　　…③

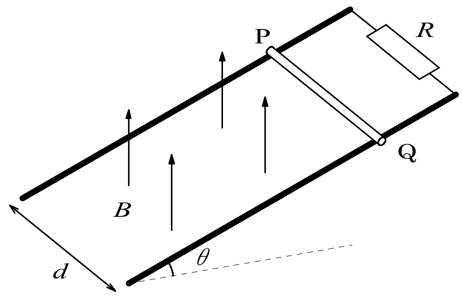
となる。時刻 $t=0$ での物体の位置を $x=0$ とすると，③式より時刻 t での位置 x は

$x=$ [ク]

となる。

11.

右図のように鉛直上向きで磁束密度 B〔T〕の一様な磁場中に，傾角 θ の平行レールがある。平行レールの上端には抵抗値 R〔Ω〕の抵抗が接続されている。平行レールの間隔は d〔m〕で，レールに垂直に導体棒 PQ が水平に置かれている。導体棒 PQ の質量は m〔kg〕で，レールと垂直で水平を保ったまま，なめらかにレール上を滑ることが出来る。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕として以下の問に答えよ。



(1)導体棒 PQ をレール上に置き静かにはなした。このとき，導体棒にながれる電流の大きさ，および導体棒の加速度の大きさを求めよ。

導体棒はレール上を滑りだした。導体棒をはなしたときを時刻 $t = 0$ とする。導体棒の速度がレールに平行下向きを正として v になった。

(2)導体棒に発生する起電力の大きさ，およびながれる電流の大きさを求めよ。

(3)導体棒に磁場から働く力の大きさを求めよ。

(4)このときの導体棒の加速度 a を求めよ。

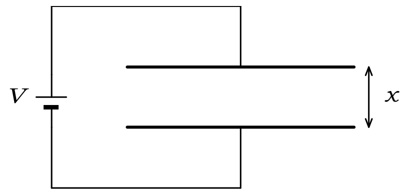
(5)微少時間 Δt の間の速度変化を Δv とすると，加速度 a は $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ となる。これらのことより，Δv を，Δt を用いてあらわせ。

(6)(5)で求めた式を解き，時刻 $t = 0$ で $v = 0$ であることも考慮に入れて，時刻 t のときの速度 v を求めよ。

(7)十分に時間が経過した後，導体棒の速度はどうなるか説明せよ。

12.

右図のように真空中に極板面積 S，極板間隔 x の平行平板コンデンサーが，起電力 V の電池に接続されている。真空の誘電率を ε_0 として以下の問に答えよ。



(1)コンデンサーに蓄えられている電気量 Q と，静電エネルギー U を求めよ。

電池を接続したまま，極板間に力を加えてゆっくりと極板の間隔を Δx だけ広げた。

(2)コンデンサーに蓄えられている電荷の変化量を ΔQ，静電エネルギーの変化量 ΔU とすると

$$\Delta Q = [\ ①\ ]\Delta x \quad , \quad \Delta U = [\ ②\ ]\Delta x$$

とあらわせる。①，②に適当な式を答よ。ただし，Δx は微少で $x \gg \Delta x$ とする。

(3)この間に，電池がした仕事 W を求めよ。ただし，ΔQ を用いずに答よ。

(4)極板を広げるために加えた仕事を W' とする。ゆっくりと極板を広げるので，回路でジュール熱は発生しないと考えてよい。ΔU, W, W' の間に成り立つ関係を求めよ。

(5)極板を広げるために加えた力が一定であるとして，力の大きさを求めよ。

10. (解説)変数 x, y の微少な変化量 Δx, Δy が, A を定数として

$$\Delta y = A\Delta x \qquad \cdots ①$$

とあらわせるとする。変化量が比例しているということは, x と y が比例しているということなので, 定数 C として

$$y = Ax + C$$

である。さらに, 特定の状態での x, y の関係(初期条件)から, C を求めればよい。

これは, 単に①式の両辺をそれぞれの変数で積分したものである。これ以外でも, 変数が左右の辺に分離できるのであれば, それを積分すればよい。この問題の[キ]と[ク]の関係がそうである。

変位 x, 速度 v, 加速度 a の間には

$$v = \frac{dx}{dt} \quad , \quad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$$

の関係がある。

なお, この問題は単に初速度 0 で一定の力を加えられた等加速度運動なので, 答は簡単にわかるはずである。

(解答)

ア. 運動量　mv　…(答)

イ. 力積　$f\Delta t$　…(答)

ウ. この間の運動量の変化は　$m\Delta v$　であるので

$$m\Delta v = f\Delta t \qquad \therefore \quad \Delta v = \frac{f}{m}\Delta t \quad \cdots ① \qquad \frac{f}{m} \quad \cdots (答)$$

エ. ①式は, 速度 v の変化が, 時間 t に比例することを示している。ゆえにある定数を C として

$$v = \frac{f}{m}t + C$$

ここで, 時刻 $t = 0$ で, $v = 0$ であるので, これより定数 $C = 0$ である。ゆえに

$$v = \frac{f}{m}t \quad \cdots ② \quad \cdots (答)$$

(ようするに, ①式を不定積分して, 初期条件から積分定数を求めている。)

オ.　$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$　…(答)

カ. ①式より

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{f}{m} \qquad \cdots (答)$$

(運動方程式　$ma = f$　から当然である。)

キ. 微少時間 Δt の間, 速度は一定であると見なすので, 変位 Δx は②式も用いて

$$\Delta x = v\Delta t = \frac{f}{m}t\Delta t \quad \cdots ③ \quad \cdots (答)$$

ク. ③式を不定積分する。C を定数として

$$\int dx = \frac{f}{m}\int tdt$$

$$x = \frac{f}{2m}t^2 + C$$

ここで, 時刻 $t = 0$ で, $x = 0$ であるので, これより定数 $C = 0$ である。ゆえに

$$x = \frac{f}{2m}t^2 \qquad \cdots (答)$$

11. (解説)変数変数 x, y の微少な変化量 Δx, Δy の関係がわかっていて，変数が左右に辺に分離できれば，両辺を積分して簡単に x, y の関係を求めることが出来る。また，特定の時の関係(初期条件)がわかっていれば，積分定数を求めることも出来る。

大学入試で，露骨に積分までせねばならない問題は無いが，誘導の形で出題されることはあるので，あらかじめ知っておけば便利である。

(1)導体棒の速度は 0 であるので，電磁誘導は起こらず，起電力は 0 である。ゆえに電流も流れない。　　電流　0　…(答)

導体棒には重力だけが働く。(レールからの垂直抗力も働くが，運動に影響しない。)

レールに沿った方向に下向きを正として加速度を a_0〔m/s²〕とする。運動方程式より

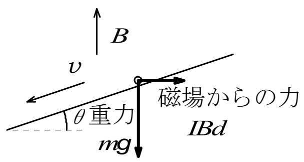
$$ma_0 = mg\sin\theta \qquad \therefore \quad a_0 = g\sin\theta \qquad \cdots(答)$$

(2)導体棒が磁場を横切って運動しているので，電磁誘導により起電力が発生する。起電力の向きは Q→P の向きで，大きさ V〔V〕は　$V = vBd\cos\theta$　…(答)

電流も Q→P の向きで，大きさ I〔A〕は　$I = \dfrac{V}{R} = \dfrac{vBd\cos\theta}{R}$　…(答)

(3)磁場，電流にともに直角方向に力が働く。向きはフレミングの左手の法則より，右図の向きとなる。大きさ F〔N〕は

$$F = IBd = \frac{vB^2d^2\cos\theta}{R} \qquad \cdots(答)$$



(4)斜面に沿って下向きの加速度を a〔m/s²〕として，運動方程式より

$$ma = mg\sin\theta - F\cos\theta = mg\sin\theta - \frac{vB^2d^2}{R}\cos^2\theta$$

$$\therefore \quad a = g\sin\theta - \frac{vB^2d^2}{mR}\cos^2\theta \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

(5)①式より

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = g\sin\theta - \frac{vB^2d^2\cos^2\theta}{mR}$$

$$\Delta v = \left(g\sin\theta - \frac{vB^2d^2\cos^2\theta}{mR}\right)\Delta t \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

(6)②式を変形して

$$\frac{\Delta v}{\left(v - \dfrac{mgR\tan\theta}{B^2d^2\cos\theta}\right)} = -\frac{B^2d^2\cos^2\theta}{mR}\Delta t$$

両辺を積分する。C を定数として

$$\int \frac{dv}{\left(v - \dfrac{mgR\tan\theta}{B^2d^2\cos\theta}\right)} = -\frac{B^2d^2\cos^2\theta}{mR}\int dt$$

$$\log\left|v - \frac{mgR\tan\theta}{B^2d^2\cos\theta}\right| = -\frac{B^2d^2\cos^2\theta}{mR}t + C$$

$$\left|v - \frac{mgR\tan\theta}{B^2d^2\cos\theta}\right| = C' e^{-\frac{B^2d^2\cos^2\theta}{mR}t} \qquad ただし \quad C' = e^C$$

ここで，時刻 $t = 0$ で，$v = 0$ であることより，C'を求める。これより v は

$$v = \frac{mgR\tan\theta}{B^2d^2\cos\theta}\left(1 - e^{-\frac{B^2d^2\cos^2\theta}{mR}t}\right) \qquad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

(7)t →∞として③式より

$$\upsilon = \frac{mgR\tan\theta}{B^2 d^2 \cos\theta} \quad \cdots(答)$$

(確認)導体棒に働く力がつりあうと，速度は一定になるので

$$mg\sin\theta - \frac{\upsilon B^2 d^2}{R}\cos^2\theta = 0 \qquad \therefore \quad \upsilon = \frac{mgR\tan\theta}{B^2 d^2\cos\theta}$$

12. (解説)x が 1 より十分小さいとき，2 次の微少量を無視すると

$$(1+x)^a \fallingdotseq 1 + ax$$

と近似できる。a は負でもよい。

ある変数 y が x の関数であるとする。つまり，$y = f(x)$ であるとする。この問題のように，x を微小に変化させたときの y の変化量を求めようとするときに，近似を使うことが多いが，その目的から考えると，微分をすればよい。つまり，$\varDelta x$ の変化に対応する $\varDelta y$ を求めたいので

$$\varDelta y = f'(x)\varDelta x$$

とすればよい。

(5)の極板間の力はもちろん　$f = \dfrac{Q^2}{2\varepsilon S}$　になる。

(1)コンデンサーの容量を C とすると

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{x}$$

ゆえに

$$Q = CV = \frac{\varepsilon_0 SV}{x} \quad \cdots(答) \quad , \quad U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x} \quad \cdots(答)$$

(2)極板を広げた後のコンデンサーの容量を C' とすると

$$C' = \frac{\varepsilon_0 S}{x + \varDelta x}$$

極板を広げた後の電荷を Q'，静電エネルギーを U' として，近似も用いて

$$Q' = C'V = \frac{\varepsilon_0 SV}{x+\varDelta x} = \frac{\varepsilon_0 SV}{x\left(1+\dfrac{\varDelta x}{x}\right)} \fallingdotseq \frac{\varepsilon_0 SV}{x}\left(1 - \frac{\varDelta x}{x}\right)$$

$$U' = \frac{1}{2}C'V^2 = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2(x+\varDelta x)} = \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x\left(1+\dfrac{\varDelta x}{x}\right)} \fallingdotseq \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x}\left(1 - \frac{\varDelta x}{x}\right)$$

ゆえに，電荷の変化量 $\varDelta Q$ は

$$\varDelta Q = Q' - Q \fallingdotseq \frac{\varepsilon_0 SV}{x}\left(1-\frac{\varDelta x}{x}\right) - \frac{\varepsilon_0 SV}{x} = -\frac{\varepsilon_0 SV}{x^2}\varDelta x \qquad ① \ -\frac{\varepsilon_0 SV}{x^2} \quad \cdots(答)$$

$$\varDelta U = U' - UQ \fallingdotseq \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x}\left(1-\frac{\varDelta x}{x}\right) - \frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x} = -\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\varDelta x \qquad ② \ -\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2} \quad \cdots(答)$$

(別解)解説にあるように，微分で求めればよい。

$$\frac{dQ}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 SV}{x^2} \quad より \qquad \varDelta Q = -\frac{\varepsilon_0 SV}{x^2}\varDelta x$$

同様に

$$\frac{dU}{dx} = -\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2} \quad より \qquad \varDelta U = -\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\varDelta x$$

(3)電池を通過した電荷はΔQであるので

$$W=\Delta Q\cdot V=-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{x^2}\Delta x \qquad \cdots(答)$$

(電池の正極から負極の方向に電荷が通過しているので，電池のする仕事は負である。)

(4)電池のした仕事と，極板を広げるために加えた仕事により，コンデンサーの静電エネルギーが変化するので

$$\Delta U=W+W' \qquad \cdots(答)$$

(5)(4)の式にΔU, Wを代入してW'を求める。

$$W'=\Delta U-W=-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\Delta x-\left(-\frac{\varepsilon_0 SV^2}{x^2}\Delta x\right)=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\Delta x$$

ここで，極板を広げるために加えた力の大きさをfとすると　$W'=f\Delta x$　であるので

$$W'=f\Delta x=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2}\Delta x \qquad \therefore \quad f=\frac{\varepsilon_0 SV^2}{2x^2} \qquad \cdots(答)$$

($Q=\dfrac{\varepsilon_0 SV}{x}$であるので，$f=\dfrac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}$となる。)