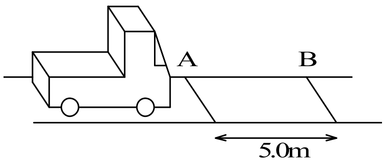
1.（等加速度運動　目的：等加速度運動の公式を使いこなす。問題を整理する能力を養う。）

直線上の道路に，A, B の 2 本の線が 5.0m の間隔で道路に垂直に交差して引かれている。この線上を一定の加速度で運動しているトラックが通過する。トラックの先端が A を通過してから後端が B を通過するまでの時間は 0.80s であった。また，トラックの先端が A, B を通過するときの速さはそれぞれ 12m/s と 13m/s であった。



(1)トラックの加速度の大きさと向きを求めなさい。
(2)トラックの先端が A を通過してから，先端が B を通過するまでの時間を求めよ。
(3)このトラックの長さを求めよ。
(4)トラックの後端が B を通過するときの速さを求めよ。

2.（等加速度運動，v–t グラフ　目的：問題を整理する。v–t グラフを使いこなす。思考力を養う）

質量 m の物体を，なめらかな水平面上で静止させておく。この物体を時刻 0 から移動させちょうど時刻 T に距離 L だけ離れた地点を通過させるように，以下の A～C の 3 通りの方法で動かす。物体の運動は一直線上に限られるとする。

A:最初から最後まで一定の加速度で動かす。

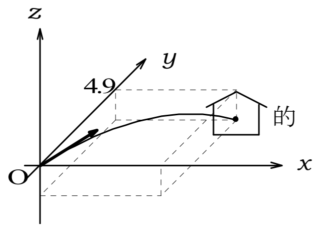
B:最初から時刻 $\dfrac{T}{2}$ まで一定の加速度で加速し，その後，等速運動させる。

C:最初から距離 $\dfrac{L}{2}$ の地点まで一定の加速度で加速し，その後，等速運動させる。

(1)A のときの加速度を求めよ。
(2)A のときの時刻 T での速さを求めよ。
(3)B のときの時刻 $\dfrac{T}{2}$ の時の速さを求めよ。
(4)B のときの時刻 $\dfrac{T}{2}$ の時のまでの物体の移動距離を求めよ。
(5)C のときの運動の様子を，横軸に時刻，縦軸に物体の速さにとってグラフに描け。グラフには加速度運動から等速運動へ移行する時刻，そのときの速さがわかるように書き入れること。
(6)C のとき，距離 L まで移動させるために物体にした仕事を求めよ。

3.（放物運動　目的：運動を方向別に捉える。）

伝統行事として行われる流鏑馬（やぶさめ）について考える。一定の速さ 9.8m/s で水平な直線上を走る馬に乗った射手が，矢を馬の進行方向から直交する方向に水平に打ち出して的に当てた。射手から見た矢の打ち出される速さを19.6m/sとする。射手が矢を放ったときの矢の位置を原点 O とし，馬の進行方向に x 軸，進行方向から矢を射た側に直交する方向に水平に y 軸，鉛直上向きに z 軸をとる。的は，馬の走路から水平に 4.9m 離れている。重力加速度の大きさを 9.8m/s^2 とし，矢の大きさは無視できるものとして以下の問に答よ。



(1)矢を射た瞬間の矢の速度の大きさと，速度の向きを求めよ。向きは x 軸からの角度を θ とし，$\tan\theta$ で答よ。

(2)矢を射た瞬間を時刻 $t = 0$s とする。矢が的に当たる前の時刻 t での矢の位置座標(x, y, z)を t を用いて表せ。

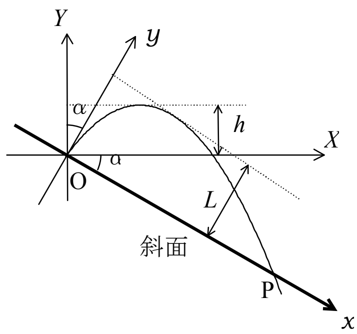
(3)矢が的に当たるまでの時間を求めよ。

(4)的の x 座標と，z 座標を求めよ。

(5)矢が的に衝突した瞬間の，矢の速度の大きさを求めよ。

4.（放物運動　目的：加速度もベクトルである。水平，鉛直以外の方向に分けることも出来る。）

図のように，水平面から角 α だけ傾いた固定した滑らかな斜面と，質量 m の小球を用意する。原点 O から斜面に垂直な向きに，速さ V_0 で小球を投げ上げた。重力の加速度を g として，次の問いに答えよ。



(1)小球が到達する，水平面 OX からの最大の高さ h を求めよ。

(2)小球が到達する，斜面 Ox からの最大距離 L を求めよ。

(3)小球が斜面へ到達したときの運動エネルギーE を求めよ。

(4)小球が斜面に到達した点をPとする。原点からの距離 OP ＝ S を求めよ。

(5)m＝1.0×10^{-1}kg，α＝30°，V_0=1.0×10^{2}m/s，g=9.8m/s^2 として，h，L，E，S の値を単位をつけて求めよ。

（山形大 1995）

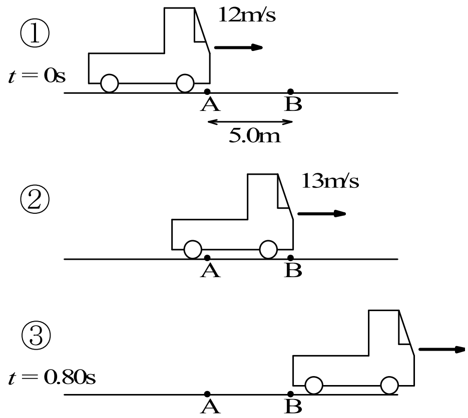
1. (解説)等加速運動の公式は，頭に入っていると思うが，初速度 v_0[m/s]，加速度 a[m/s²]で時間 t[s]後の速度を v[m/s]，変位を x[m]として

$$v = v_0 + at$$

$$x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

$$v^2 - v_0^2 = 2ax$$

単なる等加速度直線運動の問題なので，問題文を読み間違えたりしないようにしよう。問題の内容をよく整理できるように，心がけましょう。



(解答)問題文には，次の①～③の状態が与えられている。

①トラックの先端が，線 A を通過する時の速さは 12m/s

②トラックの先端が，線 B を通過する時の速さは 13m/s

③トラックの後端が線 B を通過する時刻は，①の状態を時刻 $t = 0$s とし，$t = 0.80$s

(1)①と②を考えて，加速度を a[m/s²]として

$13^2 - 12^2 = 2a \times 5.0$

∴　$a = 2.5\mathrm{m/s^2}$　…(答)

(2)②の状態の時刻を t_2[s]として

$13 = 12 + 2.5 \times t_2$　　∴　$t_2 = 0.40$s　…(答)

(別)AB 間の距離が 5.0m であるので

$5.0 = 12t_2 + \frac{1}{2} \times 2.5t_2^2$

これを解いて

$$t_2 = -10\ ,0.40\mathrm{s}$$

$t_2 > 0$ より　$t_2 = 0.40$s　…(答)

(3)トラックの長さを L[m]とする。①から③の状態までに，トラックは $5.0 + L$ だけ変位しているので

$$5.0 + L = 12 \times 0.80 + \frac{1}{2} \times 2.5 \times 0.80^2$$

∴　$L = 5.4$m　…(答)

(4)トラックの後端が B を通過するときの速さを v[m/s]として

$v = 12 + 2.5 \times 0.80 = 14$m/s　…(答)

2. (解説)この問題は，等加速度運動の式を使っても出来るが，縦軸に速度 v，横軸に時刻 t をとった v–t グラフで考えると考えやすい。v–t グラフの面積が変位である。

(1)A のときの加速度を a_Aとして

$$L = \frac{1}{2}a_A T^2 \qquad \therefore \qquad a_A = \frac{2L}{T^2} \qquad \ldots(答)$$

(2)時刻 T での速さを V_Aとして

$$V_A = a_A T = \frac{2L}{T} \qquad \ldots(答)$$

(3)B の場合，時刻$\frac{T}{2}$での速度を V_Bとすると，v–t グラフは図 1 のようになる。移動した距離は L で，距離はグラフの面積であるので

$$L = \frac{1}{2}V_B \times \frac{T}{2} + V_B \times \frac{T}{2} \qquad \therefore \qquad V_B$$

$$= \frac{4L}{3T} \qquad \ldots(答)$$

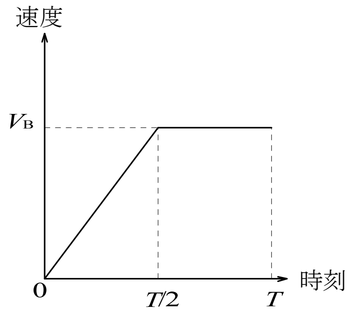


図 1

(4)同様にグラフの面積を求めればよい。

$$\frac{1}{2}V_B \times \frac{T}{2} = \frac{L}{3} \qquad \ldots(答)$$

(計算しなくても面積の比からすぐに答えは出る)

(5)時刻 t_c で速度 V_Cの等速運動に移行したとすると、v–t グラフは図 2 となる。時刻 t_cまでの移動距離が図の S_1、t_c以降が S_2で、いずれも$\frac{L}{2}$である。ゆえに

$$\frac{1}{2}V_C t_C = V_C(T - t_C) = \frac{L}{2}$$

$$\therefore \qquad V_C = \frac{3L}{2T} \qquad , \qquad t_C = \frac{2T}{3}$$

これをグラフに描き直すと、右図となる。

(計算しなくても、$S_1 = S_2$ より、t_c はすぐに求まる。)

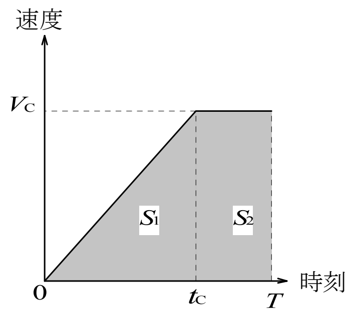
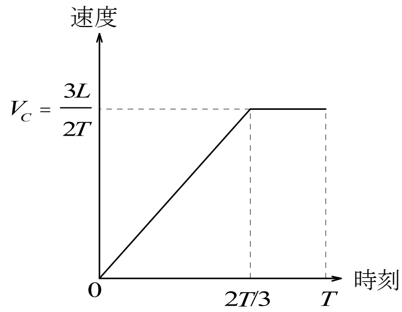


図 2

(5)答



(6) (物体に与えた仕事)＝(物体の運動エネルギー変化)

であるので、仕事 W は

$$W = \frac{1}{2}mV_C^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{3L}{2T}\right)^2$$

$$= \frac{9mL^2}{8T^2} \qquad \ldots(答)$$

3. (解説)3 次元の放物運動で大変複雑そうに見えるが、方向別に運動をよく考えて分析していく。加速度がどの方向の成分を持っているかをよく考えること。

(解答)この運動では方向別に考えて

x 方向：初速度　9.8m/s の等速運動

y 方向：初速度 19.6m/s の等速運動

z 方向：初速度 0　加速度　−9.8m/s² の等加速度運動

をしている。

(1)矢を射た瞬間の速度の成分は、x 方向 9.8m/s、y 方向 19.6m/s、z 方向 0 である。速さ v_0 は

$$v_0 = \sqrt{9.8^2 + 19.6^2} = 9.8\sqrt{5} = 9.8 \times 2.23 = 21.8 \fallingdotseq 22\text{m/s} \qquad \cdots(答)$$

また x 軸となす角を θ とすると

$$\tan\theta = \frac{19.6}{9.8} = 2.0 \qquad \ldots(答)$$

(2)それぞれの方向に、等速、等加速度運動と考える。

$$x = 9.8t \quad , \quad y = 19.6t \quad , \quad z = -\frac{1}{2} \times 9.8t^2 = -4.9t^2 \qquad \ldots(答)$$

(3)的の y 座標は 4.9 であるので

$$y = 19.6t = 4.9 \quad \therefore \quad t = 0.25\text{s} \qquad \cdots(答)$$

(4)(3)で求めた時刻を(2)の式に代入すればよい。

$$x = 9.8 \times 0.25 = 2.45 \fallingdotseq 2.5\text{m} \qquad \ldots(答)$$

$$z = -4.9 \times 0.25^2 = 0.306 \fallingdotseq 0.31\text{m} \qquad \ldots(答)$$

(5)速度の x、y 成分は変化していない。z 成分は

$$-9.8\text{t} = -9.8 \times 0.25 = -2.45\text{m/s}$$

ゆえに速さ v は

$$v_1 = \sqrt{9.8^2 + 19.6^2 + (-2.45)^2} = \sqrt{2.45^2 \times (4^2 + 8^2 + 1^2)}$$

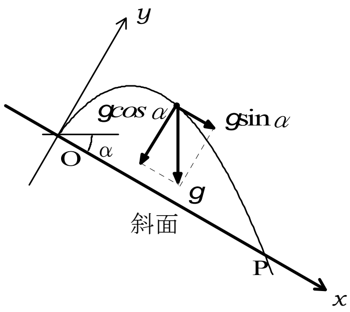
$$= 2.45 \times 9 = 22.05 \fallingdotseq 22\text{m/s} \qquad \cdots(答)$$

4. (解説)重力による運動も，必ずしも水平，鉛直に分ける必要はなく，任意の方向に分ければよい。この問題では，(2)以降は，斜面に平行と垂直に分けると解きやすい。ただし，加速度なども分解すること。

(1)$X-Y$座標で考える。Y方向の初速度は $V_0\cos\alpha$ であるので，最高点までの高さ h は

$$0^2-(V_0\cos\alpha)^2=-2gh \qquad \therefore \quad h=\frac{V_0^2\cos^2\alpha}{2g} \qquad \cdots(答)$$

(2) $x-y$ 座標で考える。重力加速度を x, y 方向へ分解して考えると，小球は，x 方向へは $g\sin\alpha$，y 方向へは $-g\cos\alpha$ の加速度でそれぞれ等加速度運動をする。初速度はそれぞれ 0 と V_0 である。斜面 Ox からもっとも離れた点では，y 方向への速度が 0 であるので



$$0^2-V_0^2=-2g\cos\alpha\cdot L \qquad \therefore \qquad L=\frac{V_0^2}{2g\cos\alpha}$$

…(答)

(3)小球が斜面に到達したとき，$y=0$ である。到達するまでの時間を t_1 として

$$V_0t_1-\frac{1}{2}g\cos\alpha\cdot t_1^2=0$$

これを解いて，$t_1 \neq 0$ でも考慮して、 $t_1=\dfrac{2V_0}{g\cos\alpha}$

このときの速度の x, y 成分をそれぞれ v_x, v_yとして

$$v_x=g\sin\alpha\cdot t_1=2V_0\tan\alpha \quad , \quad v_y=V_0-g\cos\alpha\cdot t_1=-V_0$$

小球の運動エネルギーEは

$$E=\frac{1}{2}m(v_x^2+v_y^2)=\frac{1}{2}mV_0^2(4\tan^2\alpha+1) \qquad \cdots(答)$$

(4)t_1 のときの xを求めればよい。

$$S=\frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t_1^2=\frac{2V_0^2\tan\alpha}{g\cos\alpha} \qquad \cdots(答)$$

(5)与えられた数値を代入する。

$$h=3.82\,\blacksquare\times10^2 \fallingdotseq 3.8\times10^2\,\mathrm{m} \quad , \quad L=5.89\,\blacksquare\times10^2 \fallingdotseq 5.9\times10^2\,\mathrm{m}$$

$$E=1.16\,\blacksquare\times10^3 \fallingdotseq 1.2\times10^3\,\mathrm{J} \quad , \quad S=1.36\,\blacksquare\times10^3 \fallingdotseq 1.4\times10^3\,\mathrm{m}$$