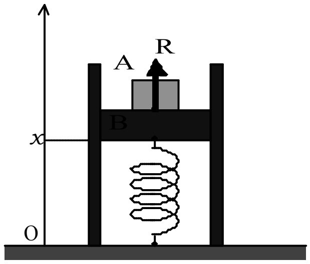
8. 目的:ばねの弾性力を正確に表現できる。力を整理して、運動方程式をたてる。

鉛直に立てた中空の筒の中に,ばね定数 k,自然長 l のばねを入れ,その下端を床に固定し,上端には質量 M の薄い台 B をとりつけた。台は筒の内壁になめらかに接しており,台の面は水平になっている。ばねの質量は無視できるものとし,重力加速度は g とする。床の面を原点とし,鉛直上方に x 軸をとって,次の空欄を埋めよ。



(1)図のように質量 m の物体 A を台 B の上に静かにおくと,ばねは自然長 l より d だけ縮んで静止した。よって d は[ア]である。さらにばねを $3d$ だけ縮めてはなす。物体 A が台 B とともに上方に運動しているときの位置 x における A,B の加速度を α,A が B から受ける抗力を R とすると,A の運動方程式は $m\alpha$ = [イ]となる。B にはばねの力もはたらくので,B の運動方程式は $M\alpha$ = [ウ]である。この 2 つの式から α を消去して,抗力 R を求めると,[エ]となる。

(2)やがて A は B を離れるが,それは R が[オ]になるときであるから,そのときのばねの長さは[カ]であり,A の速度は[キ]である。そして,A はその位置よりさらに[ク]だけ上がる。ただし,A,B は鉛直方向にのみ上下するものとする。

9. 目的　観測する立場を明確に。慣性力を考えれば、あとは物理法則は同じ。

地上の水平な直線レールの上を走る電車がある。時刻 t=0 から t=4Tまでの間の，時刻 tと電車の速度 v の関係を図 1 に示す。図 2 に示すように，電車内には，傾角 30°のなめらかな斜面があり，斜面上に質量 m の物体が置かれている。斜面は十分に長く，物体が電車の床に到達することはないものとする。重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ。

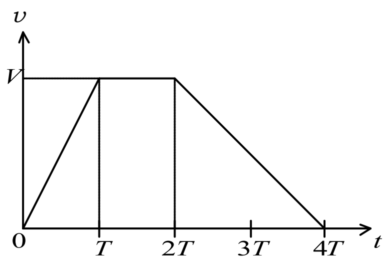


図 1

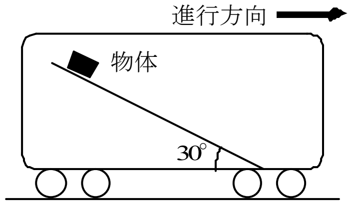


図 2

時刻 t =0 から Tまでの間，電車内の人から見て物体は斜面上で静止していた。

(1)時刻 t =0 から Tまでの間の電車の加速度を，g を用いて表せ。

(2) Vを，T, g を用いて表せ。

(3)時刻 t =Tから 2Tまでの間，物体は斜面を滑り降りる。電車内で見た物体の斜面に沿った加速度を，g を用いて表せ。

(4)時刻 t =Tから 2Tまでの間，物体が斜面を滑り降りた距離を g, Tを用いて表せ。

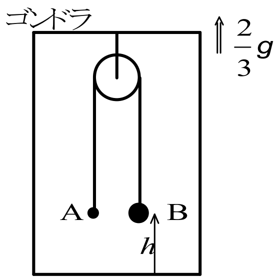
(5)時刻 t =2Tで，物体の地上に対する速度の水平成分，鉛直成分を Vを用いて表せ。

(6)時刻 t =2Tから 4Tまでの間，電車内で見た物体の斜面に沿った加速度を，g を用いて表せ。

(7)時刻 t =4Tで，物体の地上に対する速度の大きさを Vを用いて表せ。

10. 目的:観測者の立場をよく考える。

慣性力、相対加速度について学ぶ



重力加速度の大きさ g として、右図のように、鉛直上向きに大きさ $\frac{2}{3}g$ の一定の加速度で運動しているゴンドラがある。ゴンドラの天井から、定滑車がつるされている。軽くて伸び縮みしないひもの両端に、それぞれ質量 m、$2m$ の物体A、Bがつるされて、定滑車にかけられている。はじめ、A、B ともにゴンドラの床から高さ h の位置で、ゴンドラに対して静止して支えられている。

A、Bを静かにはなす。以下の問に答えよ。ただし、ひもは十分に長く、物体Aが滑車に衝突することはないものとする。また、ゴンドラ内の様子を、地上から観測できるものとする。

(1) 鉛直上向きを正として、地上の観測者からみたときの物体 A、B の加速度の大きさをそれぞれ a_1、a_2、ひもの張力を T とする。物体 A、B の運動方程式をそれぞれ求めよ。

(2)a_1、a_2 の関係を求めよ。

(3)a_1、a_2、T を求めよ。

(4)ゴンドラ内の観測者からみた B の加速度の大きさ α と向きを求めよ。

(5)以上の運動を、ゴンドラ内の観測者から見た場合の、物体A、Bの運動方程式を、α を用いてそれぞれ求めよ。また、α の大きさを求め、(4)と一致することを確認せよ。

物体 B はゴンドラの床と完全非弾性衝突をした後。ひもはたるんだ。

(6)A, B をはなしてから物体 B がゴンドラの床に衝突するまでの時間を求めよ。

(7)B が床と衝突した直後，物体 A のゴンドラに対する速さを求めよ。

(8)ゴンドラ内で見て，物体 A は衝突後さらにどれだけの高さ上昇するか求めよ。

⇒重:24

8.(解説) この問題で，はじめバネは自然長より縮んだ状態であるので，任意の x で式を立てるときも，縮んだ状態で考えた方がよい（伸びた状態までいくかどうかわからない）。x はバネの長さを表すので，自然長からの縮みは $l-x$ である。

(1)ア. A, B 一体で考える。鉛直方向の力のつりあいより

$$kd-(M+m)g=0 \qquad \therefore \quad d=\frac{(M+m)g}{k} \quad \cdots ①$$

イ. Aには上向きの抗力と重力のみが働く。

$$m\alpha=R-mg \quad \cdots ②$$

ウ. Bには下向きの抗力，重力と，ばねの弾性力 $k(l-x)$ が働く。

$$M\alpha=k(l-x)-Mg-R \quad \cdots ③$$

エ. ②, ③式より α を消去して R を求める。

$$R=\frac{km(l-x)}{M+m} \quad \cdots ④$$

(2)オ. A と B が離れるのは，抗力 $R=0$

カ. ④式より R = 0 になるのは，　$x=l$　(自然長の時である)

キ. はじめ，自然長より $4d$ だけ下にあるので，自然長に戻ったときの速さを v として，力学的エネルギー保存則より

$$-(M+m)g\cdot 4d+\frac{1}{2}k(4d)^2=\frac{1}{2}(M+m)v^2$$

①の d を代入して v を求める。

$$v=2g\sqrt{\frac{2(M+m)}{k}} \qquad (d\text{を用いて表すと}\ \ v=2\sqrt{2gd}\ )$$

ク. A は，速さ v で鉛直投射されたので，その位置より最高点までの高さを h として

$$0-v^2=-2gh \qquad \therefore \quad h=\frac{v^2}{2g}=\frac{4(M+m)g}{k} \qquad (d\text{を用いると}\ \ h=4d\ )$$

9. (解説) 加速度運動している観測者から見る場合は，物体に慣性力が働いていると考える。それ以外，物理法則は，同じである。

①観測者から見て静止，あるいは等速直線運動しているのなら，慣性力を含んだつりあい。

②それ以外なら，慣性力を含んで運動方程式をつくる。

(1)この間，加速度運動をする電車内の観測者から見て物体は静止しているので，慣性力を含んでつりあいを考える。電車の加速度を α として，物体に働く力は図 1 になる。斜面に平行な方向のつりあいより

$$m\alpha\cos 30^\circ-mg\sin 30^\circ=0$$

$$\therefore \quad \alpha=g\tan 30^\circ=\frac{\sqrt{3}g}{3} \quad \cdots ① \quad \cdots(\text{答})$$

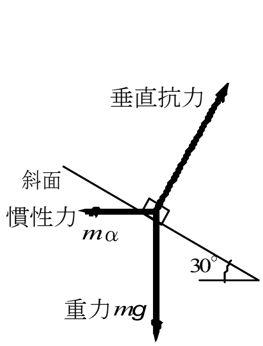


図 1

(2)グラフより加速度を求めて，①式を使う。

$$\alpha = \frac{V}{T} = \frac{\sqrt{3}g}{3} \qquad \therefore \quad V = \frac{\sqrt{3}gT}{3} \qquad \cdots② \qquad \cdots(答)$$

(3)$t = T \sim 2T$までの間，電車は等速運動をするので，慣性力を考える必要はない。単なる斜面を滑る物体である。斜面に平行下向きに物体の加速度をa_1として

$$ma_1 = mg\sin 30° \qquad \therefore \quad a_1 = g\sin 30° = \frac{g}{2} \qquad \cdots(答)$$

(4)物体は$t = T$から初速度 0，加速度a_1で斜面を滑り降りる。斜面を滑り降りた距離をlとして

$$l = \frac{1}{2}a_1(2T - T)^2 = \frac{gT^2}{4} \qquad \cdots(答)$$

(5)$t = 2T$で，電車内で見た物体の速度をuとする。②式も利用してuをVで表すと

$$u = a_1(2T - T) = \frac{gT}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}V$$

また，速度の向きは斜面に平行である。電車の速度は水平にVなので，物体の地上から見た速度の水平成分v_x，鉛直下向き成分v_yは

$$v_x = u\cos 30° + V = \frac{\sqrt{3}V}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + V = \frac{7}{4}V \qquad \cdots(答)$$

$$v_y = u\sin 30° = \frac{\sqrt{3}V}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}V \qquad \cdots(答)$$

(6)この間，電車の加速度の大きさは$\frac{\alpha}{2}$で，向きは進行方向と逆向きである。電車内で見て，物体に働く力は図 2 のようになる。電車内で見た斜面に平行下向きの加速度をa_2とし，運動方程式をつくる。①式も利用して

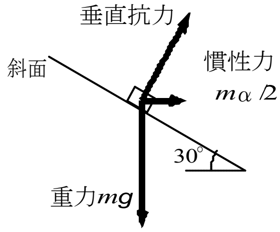


図 2

$$ma_2 = mg\sin 30° + m\frac{\alpha}{2}\cos 30° = mg\sin 30° + \frac{1}{2}mg\sin 30° = \frac{3}{4}mg$$

$$\therefore \quad a_2 = \frac{3}{4}g \qquad \cdots(答)$$

(7)物体は$t = 2T$から初速度u，加速度a_2で斜面を滑り降りる。$t = 4T$での速度をu'とし，②式も利用して

$$u' = u + a_2(4T - 2T) = \frac{\sqrt{3}}{2}V + \frac{3g}{4} \times 2T = \frac{\sqrt{3}}{2}V + \frac{3}{2} \times \sqrt{3}V = 2\sqrt{3}V \qquad \cdots(答)$$

（$t = 4T$で，電車の速度は 0 なので，地上から見た速度も同じである。）

10.(解説)このような問題では、観測する立場ごとにしっかりと整理して考えること。
ゴンドラ内で物体 A、B の運動はどう見えるのかよく考え、相対加速度を利用しよう。
また、加速度運動してる観測者している立場で解く場合は、物体には慣性力が働くように見える。質量 m の物体に働く慣性力は、観測者の加速度を α として、加速度と逆向きに大きさ $m\alpha$ である。α は、物体の加速度ではなく、観測者の加速度であることに注意すること。慣性力さえ考えれば、観測者は自分が加速度運動していることを考えなくても良い

(1)A、B には鉛直上向きの張力 T と、鉛直下向きのそれぞれの重力 mg、$2mg$ が働いているだけである。A の加速度は上向きであることは明らかだが、B はわからない。そこで、A、B とも上向きを正として運動方程式を作る。地上から見ているので、ゴンドラの動きは関係ない。

A:　$ma_1 = T - mg$　…①　、B:　$2ma_2 = T - 2mg$　…②　…(答)

(2)ここで、ゴンドラから見ると A、B はどんな運動をするか考えてみる。ゴンドラ内で見ると、同じ大きさの(相対)加速度で、A は上向きに、B は下向きに運動しているはずである。A、B の相対加速度を、それぞれ α_1、α_2 とすると、

A:　$\alpha_1 = a_1 - \dfrac{2}{3}g$　　B:　$\alpha_2 = a_2 - \dfrac{2}{3}g$

であるので、向きが逆であることも考慮して、

$$\alpha_1 = -\alpha_2$$

$$a_1 - \frac{2}{3}g = -\left(a_2 - \frac{2}{3}g\right) \qquad \therefore \quad a_1 + a_2 = \frac{4}{3}g \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

(3)①、②、③式を解く。

$$a_1 = \frac{11}{9}g \quad 、\quad a_2 = \frac{g}{9} \quad 、\quad T = \frac{20}{9}mg \qquad \cdots(答)$$

(4)ゴンドラから見た B の相対加速度 α_2 は、

$$\alpha_2 = \frac{g}{9} - \frac{2}{3}g = -\frac{5}{9}g$$

ゆえに鉛直下向きで、大きさ α は

$$\alpha = |\alpha_2| = \frac{5}{9}g \qquad \cdots(答)$$

(ちなみに、A の相対加速度は　$\alpha_1 = \dfrac{5}{9}g$ で、B と同じ大きさで鉛直上向きである。)

(5)ゴンドラ内で観測すると、A、B にはそれぞれ大きさ $\dfrac{2}{3}mg$ 、$\dfrac{4}{3}mg$ の慣性力が鉛直下向きにかかる。また、ゴンドラに対して、A は鉛直上向きに、B は鉛直下向きに大きさ α の加速度を持つので、それぞれの加速度の方向に運動方程式を作る。

A:　$m\alpha = T - mg - \dfrac{2}{3}mg$　…④　、B:　$2m\alpha = 2mg + \dfrac{4}{3}mg - T$　…⑤

④、⑤式を解いて、　$\alpha = \dfrac{5}{9}g$　、　$T = \dfrac{20}{9}mg$　…(答)

で、もちろん結果は一致する。また、a_1、a_2 も計算して一致することを確かめよう。

(6)ゴンドラに対する加速度で考える。衝突までの時間を t とすると、

$$h = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} \times \frac{5g}{9}t^2 \qquad \therefore \quad t = 3\sqrt{\frac{2h}{5g}} \qquad \cdots(答)$$

(7)ゴンドラに対する速度であるので、ゴンドラに対する加速度で考える。速度 v_1 として、

$$v_1 = \alpha t = \frac{5g}{9} \times 3\sqrt{\frac{2h}{5g}} = \frac{\sqrt{10gh}}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)衝突後，ひもの影響がなくなり，物体 A は鉛直投射となる。ゴンドラから見た加速度を β とすると

$$\beta = -g - \frac{2}{3}g = -\frac{5}{3}g$$

ゆえに，物体 A が上昇する距離 H は

$$0 - v_1^2 = 2\beta H \qquad \therefore \qquad H = -\frac{v_1^2}{2\beta} = \frac{h}{3}$$