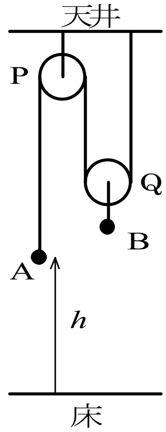
11. 目的：動滑車の加速度，動滑車に働く力を学ぶ

図のように，定滑車 P と動滑車 Q が，天井からつり下げられている。また，おもり A, B がそれぞれ図のようにつり下げられている。おもり B の質量は，m である。おもりと滑車をつり下げている糸はいずれもかるく，滑車 P, Q の質量は無視できるものとする。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。



はじめ，A, B をはなしても，静止したままであった。

(1)おもり A の質量を求めよ。

おもり A を質量 M のものに取り替え，静かにはなすと，A は一定の加速度で落下した。A の鉛直下向きの加速度を a_1，おもり B の鉛直上向きの加速度を a_2 とする。A につながっている糸の張力の大きさを T とする。

(2)おもり A, B の運動方程式をそれぞれつくれ。

(3)おもりをはなしてから時間 t が経過したとき，A, B それぞれのはじめの位置からの移動距離 s_1, s_2 を，a_1, a_2, t で表せ。

(4) s_1, s_2 の関係をよく考えて，a_1, a_2 の関係を式で表せ。

(5) a_1, a_2, T を，M, m, g で表せ。

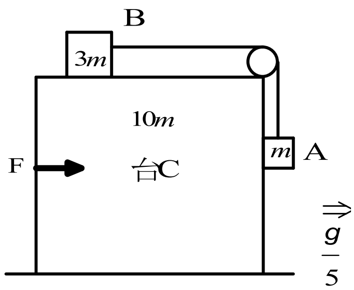
ここで，$M = 2m$ とする。おもり A をはなしたとき，床からの高さは h であった。

(6)おもり A が，床に衝突するまでの時間を求めよ。

(7)おもり A が床に衝突する直前の，おもり A, B の運動エネルギーの和を求めよ。

12. 目的：台上で見た物体の動きを想像できるようになること

なめらかな水平な床に、質量 $10m$ の直方体の台 C が置かれている。C には滑車がつけられ、軽い糸がかけられている。糸の両端には質量 m の物体 A と、$3m$ の物体 B がつけられ、A は台 C の鉛直な側面に接してつるされ、B は台 C の水平でなめらかな上面に置かれている。重力加速度の大きさを g とする。



はじめ、全てが静止した状態から、台 C に水平右向きの一定の大きさの力 F を加える。同時に、A、B を静かにはなした。台 C は右向きの一定の加速度 $\dfrac{g}{5}$ で動き出した。また、A は C のなめらかな側面に接して落下した。以下の問に答えよ。

(1)A の加速度の、鉛直下向きの成分を α とする。糸の張力の大きさを T として、台 C 上で観測した A、B の運動方程式を求めよ。

(2)α、T を求めよ。

(3)床から見た B の加速度を求めよ。

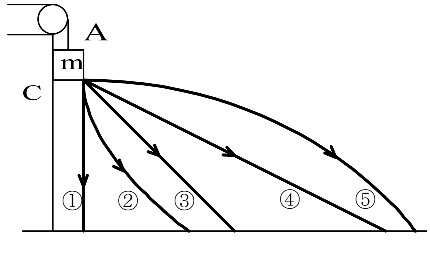
(4)B が C 上で水平に距離 l だけ進む時間を求めよ。また、距離 l だけ進んだ時、B の台に対する速度を求めよ。

(5)A が C の側面から受ける力の大きさを求めよ。

(6)台 C を押す力 F の大きさを求めよ。

(7) 台が床から受ける力の大きさを求めよ。

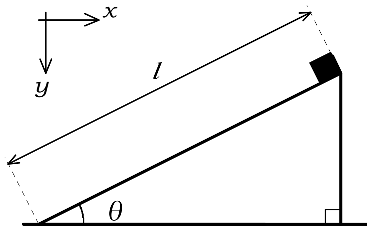
(8)床から見た A の運動の軌跡は、下図の①～⑤のどれか、最も適当なものを選べ。ただし、A が床に衝突する以前に、B が滑車に衝突することはないものとする。



13. 目的：台上から見るとどう見えるか？

相対加速度をよく考える。

図のように，なめらかな水平面に，傾角 θ のなめらかな斜面を持つ台が置かれている。台の質量は M で，斜面の長さは l である。台が静止している状態で，斜面の上端に質量 m の小物体を置き静かにはなす。重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ。



図で，水平右向きを x 方向，鉛直下向きを y 方向とする。台の加速度を A，小物体の加速度の x 成分，y 成分をそれぞれ a_x，a_y とする。また，台と小物体の間に働く垂直抗力の大きさを N とする。

(1)台について，x 方向の運動方程式をつくれ。

(2)小物体について，x，y 方向の運動方程式をつくれ。

(3)台上で見た，小物体の相対加速度の x，y 成分 b_x，b_y を，A，a_x，a_y を用いて求めよ。

(4) b_x，b_y の関係をよく考えて，A，a_x，a_y の関係を式で表せ。

ここで，$M = 5m$，$\theta = 30^\circ$ とする。

(5) A，a_x，a_y を求めよ。

(6)小物体の斜面に沿って滑り降りる加速度を求めよ。

(7)小物体が，斜面の下端に到達するまでの時間を求めよ。

(8)小物体が下端に到達する直前，台と小物体の速度の x 成分をそれぞれ求めよ。

(9)小物体が斜面の下端に到達するまでに，台と小物体がそれぞれ水平方向に移動した距離を求めよ。

11.(解説) 基本どおりに運動方程式をつくる。ポイントは，A と B の移動距離の関係より，加速度の関係を考えるだけである。また，動滑車に質量はないので，B をつるす張力は $2T$ になる。

(1)Aの質量を m_0 とする。また，A につながっている糸の張力の大きさを T_0 とする。Bをつり下げている糸の張力の大きさは $2T_0$ である。おもり A，B についてのつりあいより，

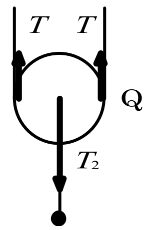
A:　$T_0 - m_0 g = 0$　　B: $2T_0 - mg = 0$

この2式を解いて，　$m_0 = \dfrac{m}{2}$　　…(答)

(2) B をつり下げている糸の張力の大きさは $2T$ である(＊注参照)。ゆえに，

A:　$Ma_1 = Mg - T$　…①　, B:　$ma_2 = 2T - mg$　…②　…(答)

(＊注)B をつり下げる糸の張力を T_2 とする。動滑車 Q に働く力は右図のようになる。動滑車 Q の加速度は a_2 だが，質量は無いとして運動方程式をつくると

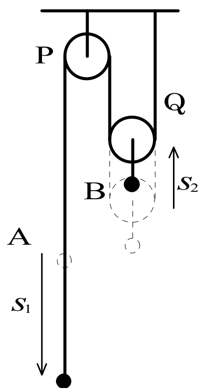


$$0 \times a_2 = 2T - T_2 \qquad \therefore \quad T_2 = 2T$$

(3)等加速度で，初速度 0 であるので，

$$s_1 = \frac{1}{2}a_1 t^2 \quad , \quad s_2 = \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad \cdots(答)$$

(4)右図からわかるように，A が s_1 下がると，定滑車 P から天井までの糸の長さが s_1 短くなる。それが，s_2 の 2 倍になるので



$$s_1 = 2s_2$$

$$\frac{1}{2}a_1 t^2 = 2 \times \frac{1}{2}a_2 t^2 \qquad \therefore \quad a_1 = 2a_2 \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

(5)①，②，③式を解く。

$$a_1 = \frac{2(2M - m)}{4M + m}g \quad , \quad a_2 = \frac{2M - m}{4M + m}g$$

$$T = \frac{3mM}{4M + m}g \qquad \cdots(答)$$

(6)$M = 2m$ を代入して，a_1を求めると，　$a_1 = \dfrac{2}{3}g$

床に衝突するまでの時間を t_1 として，

$$\frac{1}{2}a_1 t_1^2 = h \qquad \therefore \quad t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_1}} = \sqrt{\frac{3h}{g}} \qquad \cdots(答)$$

(7)衝突直前のおもり A，B の速さをそれぞれ v_1，v_2 とする。

$$v_1 = a_1 t_1 = \frac{2}{3}g \times \sqrt{\frac{3h}{g}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad , \quad v_2 = a_2 t_1 = \frac{v_1}{2} = \sqrt{\frac{gh}{3}}$$

おもり A，B の運動エネルギーの和 K は，

$$K = \frac{1}{2}2mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_2^2 = m \times \left(2\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 + \frac{1}{2}m \times \left(\sqrt{\frac{gh}{3}}\right)^2 = \frac{3}{2}mgh \qquad \cdots(答)$$

(別)おもりA,B 全体の力学的エネルギーが保存するので，運動エネルギー(の増加量)K は

$$K - 2mgh + mg\frac{h}{2} = 0 \qquad \therefore \quad K = \frac{3}{2}mgh$$

12. (解説)観測者の立場をしっかりと意識することを心がけよう。台上の観測者から見るときは，台は止まっていると考えてよい。

滑車は台 C の一部である。滑車に働く力を忘れないように。

A の運動も，水平・鉛直にしっかり分けて考えよう。

(1)台 C 上で観測すると，A は鉛直下向きに，B は水平右向きに，共に加速度 α で運動する。A に働く鉛直方向の力と，B に働く水平方向の力だけを描くと，図 1 のようになる。B には，慣性力が働く。A にも働くが，水平方向なので，いまは関係ない。それぞれの加速度の方向に，運動方程式を立てる。

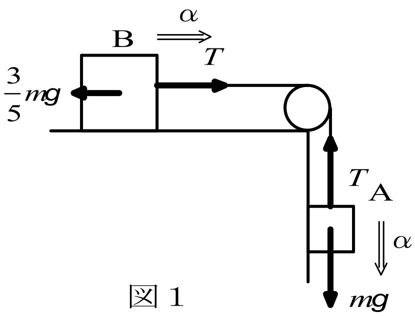


図 1

A:　$m\alpha = mg - T$　…①

B: $3m\alpha = T - \frac{3}{5}mg$　…②　…(答)

(2)①，②式を解いて

$$\alpha = \frac{g}{10}\quad,\quad T = \frac{9}{10}mg\qquad \cdots(答)$$

(3)床から見た B の加速度を a_B とする。台 C から見た相対加速度が α であるので

$$\alpha = a_B - \frac{g}{5}\qquad \therefore\quad a_B = \alpha + \frac{g}{5} = \frac{3g}{10}\qquad \cdots(答)$$

(4)台 C に対する加速度 α で考える。時間を t_1 として，

$$\frac{1}{2}\alpha t_1^2 = l\qquad \therefore\quad t_1 = \sqrt{\frac{2l}{\alpha}} = 2\sqrt{\frac{5l}{g}}\qquad \cdots(答)$$

また，そのときの台 C に対する速度 u_1 は，

$$u_1 = \alpha t_1 = \frac{g}{10}\times 2\sqrt{\frac{5l}{g}} = \sqrt{\frac{gl}{5}}\qquad \cdots(答)$$

(5) 台 C と A の間に働く垂直抗力が N である。A は床から見て，水平方向に大きさ $\frac{g}{5}$ の加速度を持つので，水平方向の運動方程式をたてる。

$$m\frac{g}{5} = N\qquad \therefore\quad N = \frac{mg}{5}\qquad \cdots(答)$$

(6)台 C と B の間に働く垂直抗力の大きさを N_B，台 C と床との間の垂直抗力の大きさを R とすると，床から観測して台 C に図 2 のような力が働く。台 C についての水平方向の運動方程式より

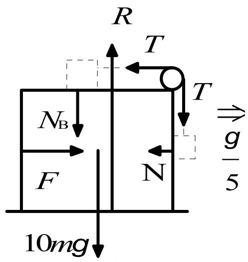


図 2

$$10m\times\frac{g}{5} = F - N - T = F - \frac{mg}{5} - \frac{9}{10}mg$$

$$\therefore F = \frac{31}{10}mg\quad \cdots(答)$$

(7)B についての鉛直方向のつりあいより，$N_B = 3mg$ である。台 C についての鉛直方向のつりあいより，

$$R - 10mg - N_B - T = 0\qquad \therefore\quad R = \frac{139}{10}mg\qquad \cdots(答)$$

(8)A の加速度の，水平方成分 $\frac{g}{5}$，鉛直成分 $\frac{g}{10}$ である。ゆえに，床から見ると図3の方向の加速度となる。はじめ，静止状態であるので，加速度の方向に直線運動する。

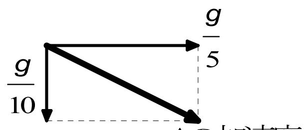


図 3

∴　　答 ④

(別解)

はじめのＡの位置を原点とし，水平右向きに x 軸，鉛直下向きに y 軸をとる。Ａをはなした時を時刻 $t=0$ として，時刻 t のとき，

$$x=\frac{1}{2}\times\frac{g}{5}t^2=\frac{gt^2}{10}\quad,\quad y=\frac{1}{2}\times\frac{g}{10}t^2=\frac{gt^2}{20}$$

ゆえに，軌跡は，$y=\frac{1}{2}x$

13. (解説)台も動くので，床から見る小物体の加速度の方向は，斜面の方向とは異なる。解く前には特定できない。このような場合は，適当な 2 方向(この場合，水平，鉛直)にわけて，両方向に運動方程式をつくる。

斜面上から見ると，小物体は斜面に沿って運動するはずである。ゆえに斜面から見た相対加速度の方向は，斜面の方向である。

また，ここではやらなかったが，慣性力を考えて，斜面から見た運動方程式つくっても良い。

(1)小物体，台に働く力は図 1 のようになる。台に働く力の内，水平方向の成分を持つのは小物体からの垂直抗力のみである。ゆえに，運動方程式は，

$MA=N\sin\theta$　…①　…(答)

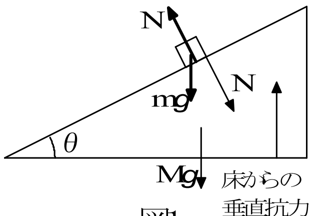


図1

(2)同様に図 1 より，小物体の運動方程式を，水平，鉛直方向に分けて考える。

x 方向：　$ma_x=-N\sin\theta$　…②

y 方向：　$ma_y=mg-N\cos\theta$　…③　　…(答)

(3)床から見た台と小物体の加速度をそれぞれ $\vec{A}=(A,0)$，$\vec{a}=(a_x,a_y)$，台から見た小物体の(相対)加速度を $\vec{b}=(b_x,b_y)$ とすると，

$\vec{b}=\vec{a}-\vec{A}$

であるので，

$b_x=a_x-A$　，　$b_y=a_y$　　…(答)

(4)台上から見ると，小物体の(相対)加速度は，斜面の方向であるはずである。b_xが，負であることも考えて，

$$\tan\theta=\frac{b_y}{-b_x}=\frac{a_y}{-(a_x-A)}\quad\cdots④\quad\cdots(答)$$

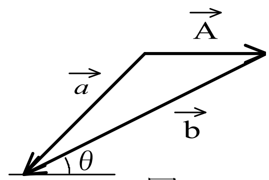


図2

なお，これらを図にすると，図 2 のようになる。

(5)①～④式に，$M=5m$，$\theta=30^\circ$ を代入して解く。

$$A=\frac{\sqrt{3}}{21}g\quad,\quad a_x=-\frac{5\sqrt{3}}{21}g\quad,\quad a_y=\frac{2}{7}g$$

(参考：$N=\frac{10\sqrt{3}}{21}mg$)

(6)台から見た相対加速度の大きさを求めるということである。つまり，図2の $\vec{b}$ の大きさを求める。相対加速度の大きさを b として，

$$b=\frac{b_y}{\sin30^\circ}=\frac{a_y}{\sin30^\circ}=\frac{4}{7}g\quad\cdots(答)$$

(参考：$b_x=-\frac{2\sqrt{3}}{7}g$　，　$b_y=\frac{2}{7}g$　)

(7)時間を t として,

$$l=\frac{1}{2}bt^2 \qquad \therefore \quad t=\sqrt{\frac{2l}{b}}=\sqrt{\frac{7l}{2g}} \qquad \cdots(答)$$

(8)台と小物体の速度の x 成分をそれぞれ V_x, v_xとする。

$$V_x=At=\frac{\sqrt{3}}{21}g\times\sqrt{\frac{7l}{2g}}=\sqrt{\frac{gl}{42}} \quad , \quad v_x=a_xt=-\frac{5\sqrt{3}}{21}g\times\sqrt{\frac{7l}{2g}}=-5\sqrt{\frac{gl}{42}} \qquad \cdots(答)$$

(9) 台と小物体の移動距離をそれぞれ X, xとして,

$$X=\frac{1}{2}At^2=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{21}g\times\left(\sqrt{\frac{7l}{2g}}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{12}l \qquad \cdots(答)$$

$$x=\frac{1}{2}a_xt^2=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{5\sqrt{3}}{21}g\right)\times\left(\sqrt{\frac{7l}{2g}}\right)^2=-\frac{5\sqrt{3}}{12}l \qquad \cdots(答)$$