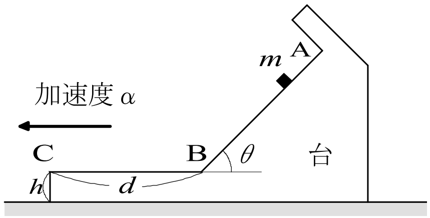
14. 目的:観測者の立場をしっかり把握する。

図に示すように，C 点の床からの高さ h〔m〕で B 点より傾角 θ の斜面の台が床の上を一定加速度 α〔m/s²〕で左方向に運動している。台の斜面上に質量 m〔kg〕の小物体があり，台上で見て小物体は静止している。重力加速度を g〔m/s²〕として以下の問いに答えよ。ただし，摩擦および空気抵抗はないものとする。



(1)台の水平方向の加速度 α〔m/s²〕を求めよ。

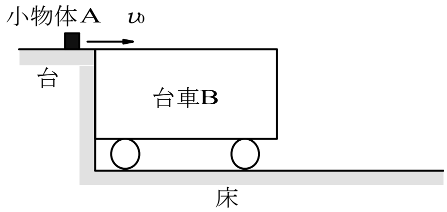
次に，斜面上の小物体に斜面に沿って下方に台上から見て初速 v〔m/s〕を与えたところ，小物体は斜面を下り，B 点を離れることなくなめらかに通過して C 点に向かった。

(2)小物体が台の端 C 点から落ちない BC 間の最小距離 d〔m〕を求めよ。

(3)BC 間の距離を $\dfrac{d}{2}$〔m〕にしたとき，台の端 C 点から小物体が飛び出した。そのとき，小物体が床に達するまでの小物体の水平到達距離 l〔m〕(飛び出した位置を O とする)を求めよ。ただし，小物体が B 点を通過したときの床上から見た台の速度を V_0〔m/s〕とする。また，台は小物体が飛び出した後，直ちに停止するものとする。　　　　(筑波大)

15. 目的: ・親子亀の基礎の習得。　　・動摩擦の向きを，間違わないように。

右図のように，速さ v_0 で台を進んできた質量 m の小物体 A が，質量 M で台と同じ高さの上面を持つ台車 B に乗った。台車 B は水平な床上を動きだし，やがて小物体 A は台車 B に対して静止した。小物体 A と台車 B の上面の間の動摩擦係数を μ'，重力加速度の大きさを g とする。台車 B の上面は十分に長く，小物体 A が落ちることはないものとする。また，図の右向きを正とする。



(1)小物体Aが台車 B 上で滑っている間，小物体 A と台車 B の加速度をそれぞれ求めよ。

(2)台車 B 上で見た小物体 A の加速度を求めよ。

(3)小物体 A が台車 B 上で滑り始めてから静止するまでの時間を求めよ。

(4)小物体 A が台車 B 上で静止したとき，台車 B の速度を求めよ。

(5)この間，小物体 A と台車 B で失われた運動エネルギーの合計を求めよ。

(6)小物体 A が台車 B 上で滑り始めてから静止するまでの間，台車 B が床に対して進んだ距離は L で，小物体 A が台車 B 上で進んだ距離は l であった。動摩擦力が，小物体 A と台車 B にする仕事をそれぞれ L, l を用いて表せ。

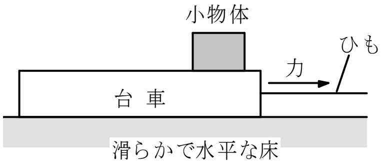
(7)l を求めよ。

(8)(5)で求めた失われた運動エネルギーを，m, μ', g, l で表せ。

16. 目的:・親子亀の決定版

・式を解くだけでなく，動きを想像する。

右図のように，滑らかで水平な床に置かれた質量 M の台車の上に，質量 m の小物体が置かれている。台車の右端には質量の無視できるひもがつけられている。速度や加速度は図の力の向きのように右向きを正の方向にとるものとする。重力の加速度の大きさを g とし，以下の問いに答えよ。



初めは，台車と小物体の間に摩擦がない場合を考えよう。

(1)台車のひもを水平方向右向きに引き，台車に F_0 の力を加えた。台車の床に対する加速度を求めよ。

次に，台車と小物体の間に摩擦がある場合を考えよう。台車と小物体の間の静止摩擦係数を μ_0，動摩擦係数を μ_1 とする。

(2)台車のひもを水平方向右向きに引き，台車に F_1 の力を加えたところ，小物体は台車の上で滑ることなく，台車と一体となって動いた。

(a) 床に対する台車の加速度を求めよ。

(b)台車に固定した座標で見た場合，小物体は静止している。これは小物体に正と負の 2 種類の水平方向の力が働いているためと考えられる。これらの力の名称を述べよ。

(3)台車を水平方向右向きに引っ張る力を F_2 まで増していったところ，小物体は台車上を滑り始めた。静止摩擦係数 μ_0 を求めよ。

(4)F_2 に比べ充分大きい水平方向右向きの力 F_3 を，台車に時刻 $t = 0$ から $t = t_0$ まで加えた。ただし台車と小物体は時刻 $t = 0$ で静止していたとし，以下では速度や加速度は床に固定された座標で考えることにする。また，台車は充分に長く，小物体が台車から落ちることはないものとする。

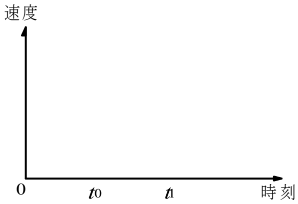
(a)力 F_3 が台車に作用している間($0 \leqq t \leqq t_0$)の台車と小物体それぞれの加速度を求めよ。

(b)力 F_3 が働かなくなる瞬間($t = t_0$)における台車の速度 V_0 と小物体の速度 w_0 を求めよ。

(c)力 F_3 が働かなくなった直後の台車の加速度を求めよ。

(d)$t = t_0$ からある時間が経過し時刻 t_1 になったとき，台車は等速度運動を始めた。等速度運動を始めるまでの時間 $t_1 - t_0$，および時刻 t_1 以降の台車の速度 V_1 を，V_0 と w_0 などを用いて表せ。

(e)以上を総合して，台車の速度 V と小物体の速度 w が時刻とともに変化するようすの概略を右の図にかき入れよ。



(大阪大)

14.(解説) どこから観測しているかを明確にすること。台上で見て斜面上で小物体に働く力はつりあっているので，物体は静止もしくは等速直線運動をする。

BC 上では，床から見て等速運動である。台から見るときは，相対加速度を考えればよい

(1)台上で観測すると，小物体に働く力は慣性力を含んでつりあっている。斜面に平行な方向のつりあいより

$$mg\sin\theta - m\alpha\cos\theta = 0 \qquad \therefore \quad \alpha = g\tan\theta \qquad \cdots(答)$$

(2)台上で観測すると，斜面上では小物体に働く力は慣性力を含んでつりあっているので，小物体は等速運動する。したがって，B を通過したときの台から見た小物体の速さは v である。

小物体が BC 間にあるとき，台から見た小物体の加速度は左向きを正として $-\alpha$ である。台から見て静止するまでの距離が，小物体が落ちない BC 間の最小距離になる。

$$0 - v^2 = -2\alpha d \qquad \therefore \quad d = \frac{v^2}{2\alpha}\left(= \frac{v^2}{2g\tan\theta}\right) \qquad \cdots(答)$$

(3)小物体が B 点を通過したときの，床から見た小物体の速度を u とすると

$$u = v + V_0$$

小物体はその後，床から見て等速運動するので，C 点から飛び出したときの速度も u である。

C 点から水平投射であるので，床に達するまでの時間 t は

$$h = \frac{1}{2}gt^2 \qquad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

ゆえに，水平到達距離 l は

$$l = ut = (v + V_0)\sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad \cdots(答)$$

15. (解説)台車上での小物体の動きは，台車から見た小物体の加速度(相対加速度)を考えると考えやすい。加速度 $\overrightarrow{a_A}$ で運動する物体を，加速度 $\overrightarrow{a_B}$ で運動する物体から見たときの相対加速度は $\overrightarrow{a_A} - \overrightarrow{a_B}$ である。

仕事は，(力)×(変位)×cosθ である。動摩擦力の仕事も基本に忠実に求めるが，系全体に動摩擦力がする仕事は，差し引き

－(動摩擦力)×(接触面同士の相対変位)

となる。

(1)台車 B から見て小物体 A は図の右向きに進むので，大きさ $\mu' mg$ の動摩擦力が小物体 A には左向きに，台車 B には右向きに働く。小物体 A と台車 B の加速度をそれぞれ a_A，a_B とし，運動方程式をつくる。

小物体 A:　$ma_A = -\mu' mg \qquad \therefore \quad a_A = -\mu' g \qquad \cdots(答)$

台車 B　:　$Ma_B = \mu' mg \qquad \therefore \quad a_B = \dfrac{\mu' mg}{M} \qquad \cdots(答)$

(2)台車 B から見た相対加速度を α として

$$\alpha = a_A - a_B = -\mu' g - \frac{\mu' mg}{M} = -\frac{M+m}{M}\mu' g \qquad \cdots(答)$$

(3)台車 B から見て，小物体の速度は v_0 から 0 まで変化する。0 になるまでの時間を t_1 として

$$0 = v_0 + \alpha t_1 \qquad \therefore \quad t_1 = -\frac{v_0}{\alpha} = \frac{Mv_0}{(M+m)\mu' g} \qquad \cdots(答)$$

(4)このときの台車 B の速度を V_1 として

$$V_1 = a_B t_1 = \frac{\mu' mg}{M} \times \frac{Mv_0}{(M+m)\mu' g} = \frac{mv_0}{M+m} \qquad \cdots(答)$$

(別解)運動量保存則　$mv_0 = (M+m)V_1$　より求める。

(5)全体の運動エネルギーの変化量を $\varDelta K$ として

$$\varDelta K = \frac{1}{2}(M+m)V_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\frac{mMv_0^2}{2(M+m)}$$

ゆえに，失われたエネルギーは　$|\varDelta K| = \dfrac{mMv_0^2}{2(M+m)}$　…①　…(答)

(6)この間，小物体 A が床に対して進んだ距離は，右向きに $L + l$ であるので，小物体 A に動摩擦力がした仕事 W_A は

$$W_A = -\mu' mg(L+l) \qquad \cdots(答)$$

台車 B に動摩擦力した仕事 W_B は

$$W_B = \mu' mgL \qquad \cdots(答)$$

(7)相対加速度 α を用いる。

$$0^2 - v_0^2 = 2\alpha l \qquad \therefore \qquad l = -\frac{v_0^2}{2\alpha} = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)\mu' g} \qquad \cdots② \quad \cdots(答)$$

(8)①，②式より

$$|\varDelta K| = \mu' mgl$$

(参考)動摩擦力が小物体 A と台車 B からなる系全体にする仕事 W は

$$W = W_A + W_B = -\mu' mg(L+l) + \mu' mgL = -\mu' mgl$$

された仕事 W だけ，系全体の運動エネルギーが変化することになる。

$$\varDelta K = W = -\mu' mgl$$

16. (解説)いわゆる親子亀の問題であるが，まず，力をしっかりと図示して考えること。力の図が書ければ，後は楽である。ポイントは摩擦力の向きになる。あらい面が接触している場合

- 接触している面同士の相対速度が 0(一緒に動いている)
  →接触面に働くのは静止摩擦，もしくは力が働いていない。静止摩擦の向きは，もし摩擦がなければどんな運動をするか考えよう。
- 接触している面同士の相対速度が 0 ではない。
  →接触面に働くのは動摩擦。向きは，どちらかの面からの相対速度を考えよう。相対速度と逆向きになる。

(1)台車の加速度を a_0 とする。台車に働く水平方向の力は F_0 のみであるので，運動方程式より

$$Ma_0 = F_0 \qquad \therefore \qquad a_0 = \frac{F_0}{M} \qquad \cdots(答)$$

(2)(a)台車と小物体を質量 $M + m$ の一つの物体と考える。加速度を a_1 として

$$(M+m)a_1 = F_1 \qquad \therefore \quad a_1 = \frac{F_1}{M+m} \qquad \cdots(答)$$

(b)台車は加速度 a_1 で運動している。その上の観測者からは，加速度と逆向きに(負の向き)慣性力が観測される。また，この観測者から見て小物体は静止しているので力はつりあっている。従って正の向きに働く力があるが，それが静止摩擦力である。

正の向き：静止摩擦力　　　負の向き：慣性力

(3)滑り出す直前とすると，台車と小物体の加速度 a_2 は，$a_2 = \dfrac{F_2}{M+m}$ である。このとき，台車上の観測者から観測すると，最大静止摩擦力 $\mu_0 mg$ と，慣性力 ma_2 がつりあっている。ゆえに

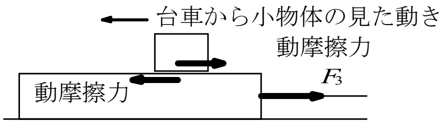
$$\mu_0 mg - ma_2 = 0 \qquad \therefore \quad \mu_0 = \frac{a_2}{g} = \frac{F_2}{(M+m)g} \qquad \cdots(答)$$

(別解)地上から見て，滑り出す直前の台車と小物体，別々に運動方程式をつくる。静止摩擦は小物体には正の向きに，台車には負の向きに働く。

台車: $Ma_2 = F_2 - \mu_0 mg$　　，　　小物体: $ma_2 = \mu_0 mg$

これらの式より，a_2 を消去して，μ_0 を求める。

(4)(a)台車の速度が小物体の速度より大きいので，台車上で見ると小物体は図の左向きに動く。ゆえに小物体に働く動摩擦力は右向き，逆に台車には左向きに働く。大きさは，$\mu_1 mg$ である。台車と小物体の加速度をそれぞれ α, β とし，運動方程式をつくる。



$$台車: M\alpha = F_3 - \mu_1 mg \qquad \therefore \quad \alpha = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} \qquad \cdots(答)$$

$$小物体: m\beta = \mu_1 mg \qquad \therefore \quad \beta = \mu_1 g \qquad \cdots(答)$$

(b)それぞれ等加速度運動をするので

$$V_0 = \alpha t_0 = \frac{F_3 - \mu_1 mg}{M} t_0 \quad \cdots(答) \qquad w_0 = \beta t_0 = \mu_1 g t_0 \quad \cdots(答)$$

(c)台車の速度の方が大きいので，動摩擦力の向きは変わらない。台車の加速度を α' として

$$M\alpha' = -\mu_1 mg \qquad \therefore \quad \alpha' = -\frac{\mu_1 mg}{M} \qquad \cdots(答)$$

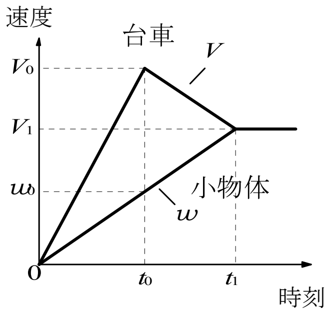
(d)小物体に働く力は変化せず，加速度は β のままである。時刻 t_1 で同じ速度 V_1 になるので

$$V_1 = V_0 + \alpha'(t_1 - t_0) = w_0 + \beta(t_1 - t_0)$$

$$t_1 - t_0 = \frac{V_0 - w_0}{\beta - \alpha'} = \frac{M(V_0 - w_0)}{\mu_1 g(M+m)}$$

$$V_1 = \frac{MV_0 + mw_0}{M+m} \qquad \cdots(答)$$

(別解)V_1 は，運動量保存則からも求まる。



(e)速度―時間のグラフの傾きが加速度になる。$\alpha > \beta > 0$,　$\alpha' < 0$ で一定であることを考慮して作図する。

小物体の加速度は初めから t_1 まで同じであることにも注意すること。t_1 以後は，両物体は等速運動する。