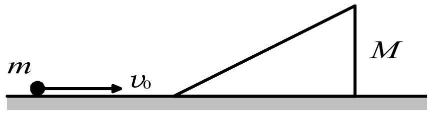
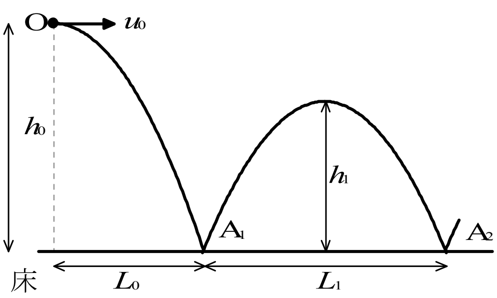
17. 目的:運動量保存の成立する条件を，把握する。
原理通りに，力積などを計算する。



図のようになめらかで水平な床の上に，質量 m の小物体と，質量 M のなめらかな斜面を持つ三角台を置く。三角台は床に対して最初静止していた。三角台に向かって小物体を速さ v_0 ですべらせた。小物体は斜面を上り始め，最高点に達した後，斜面をすべり落ち，再び床に達した。重力加速度を g とし，斜面と床が接する点では，小物体はかどの影響を受けずになめらかに通過するものとする。また，初速度の向きを正とする。

(1)最高点に達したときの，床に対する小物体の速度の水平方向成分を求めよ。
(2)最高点での床からの高さを求めよ。
(3)小物体が再び床に達した後の，小物体と三角台の床に対する速度の水平方向成分を求めよ。
(4)この衝突で，小物体に与えた力積の大きさを求めよ。
(5)この衝突の反発係数を求めよ。　(山口大・改)

18. 目的:床などとの斜め衝突



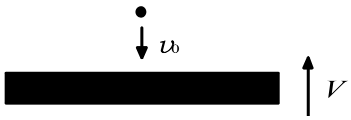
床から高さ h_0 の点 O より，質量 m の小物体を水平に速さ u_0 で投げ出す。小球と床との衝突の際，摩擦力は働かず，はねかえり係数を $e(<1)$ とする。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

(1)小球を投げてから初めて床に衝突する点を A_1 とする。O から A_1 までの時間 t_0，点 O の真下の点から A_1 までの距離 L_0 を求めよ。
(2) A_1 ではね返った直後の小球の速さを求めよ。
(3) A_1 での衝突の前後で，小球が失ったエネルギーを求めよ。
(4) A_1 ではね返った後，最も高くなる点の床からの高さ h_1 を求めよ。
(5)次に床に衝突する点を A_2 とする。A_1 から A_2 までの時間 t_1，距離 L_1 を求めよ。

小球は床と衝突をくり返し，やがてはね上がらなくなる。
(6)はね上がらなくなった後，小球はどのような運動をするか答えよ。
(7)小球がはね上がらなくなるまでの時間 T，また，はね上がらなくなる点の，点 O の真下の点からの距離 L を求めよ。
(8)小球を投げてから，はね上がらなくなるまで，小球が失ったエネルギーの大きさを求めよ。

19. 目的:片方の速度が変化しない場合の衝突について学ぶ。

運動の状態をしっかりと把握できるように。



鉛直上向きの一定の速さ V で動く平板がある。時刻 $t=0$ で，平板の上方から質量 m の小球が，鉛直下向きの速さ v_0 で衝突した。重力加速度の大きさを g とする。平板の質量は小球の質量に比べて十分大きいものとして以下の問に答えよ。

はじめに，小球と板とのはねかえり係数が 1 であるとする。

(1)小球が平板と衝突した直後の速度を求めよ。

(2)衝突の際，小球が受けた力積の大きさを求めよ。

(3)小球が再び平板と衝突するまでの時間，および衝突直前の小球の速度を求めよ。

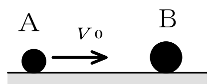
(4)小球はその後どんな運動をするか考えよ。

次に，はねかえり係数を $e\,(e<1)$ とする。

(5) 小球は，平板と衝突をくり返し，いつかはね返らなくなる。はじめに平板と衝突してから，はね返らなくなるまでの時間を求めよ。

20. 目的:重心の位置，重心の速度の求め方を学ぶ

重心の速度の性質を学ぶ



右の図のように，なめらかな水平面上に質量がそれぞれ m，$2m$ の物体 A，B がある。物体Aは速さ v_0 で右向きに動き，Bと完全弾性衝突する。A，B の運動は一直線上に限定される。

(1)衝突前，A，B からなる体系の重心の速度を求めよ。

(2)衝突後，A，B の速度を求めよ。

(3)衝突後，A，B からなる体系の重心の速度を求め，衝突前と変化しないことを確かめよ。

17. (解説)体系の運動量が保存するのは，内力(体系に含まれる物体間の力)のみが働き，外力(体系に含まれない物体から働く力)が働かないときである。この問題で，小物体と三角台からなる体系を考えると，それぞれに働く重力，床からの垂直抗力が外力として働き，またつりあっていないので，運動量は保存しない。しかし，これらの外力は全て鉛直方向に働き，水平方向に働くのは内力である小物体と三角台の間の垂直抗力だけである。ゆえに，体系の水平方向の運動量は保存する。

また，この場合，体系全体の力学的エネルギーも保存する。

(1)最高点に達したとき，三角台から見ると小物体の相対速度は 0，つまり小物体と三角台の速度は等しい。ゆえに，小物体の速度も水平方向であり，この速度を V とする。水平方向の運動量が保存するので

$$mv_0=(m+M)V \qquad \therefore \quad V=\frac{m}{m+M}v_0 \qquad \cdots(答)$$

(2)最高点の床からの高さを h とすると，体系全体の力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}(m+M)V^2+mgh$$

(1)の V を代入して h を求める。　$h=\dfrac{Mv_0^2}{2(m+M)g}$　$\cdots$(答)

(3)床に達したときの小物体と三角台の速度をそれぞれ v, V とする。水平方向の運動量保存則より

$$mv_0=mv+MV \qquad \cdots①$$

また，体系全体の力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}MV^2 \qquad \cdots②$$

①，②式を解くと，

$$v=v_0,\frac{m-M}{m+M}v_0 \qquad V=0,\frac{2m}{M+m}v_0$$

$v=v_0, V=0$ の組み合わせは，初めの状態であるので答は，

$$v=\frac{m-M}{m+M}v_0 \quad , \quad V=\frac{2m}{M+m}v_0 \qquad \cdots(答)$$

(4)小物体の運動量変化が与えられた力積である。その大きさは

$$|mv-mv_0|=\left|mv_0\left(\frac{m-M}{m+M}-1\right)\right|=\frac{2mM}{m+M}v_0 \qquad \cdots(答)$$

(別解)　小物体の受けた力積 $=-$(三角台の受けた力積)

$$=-(MV-0)=-\frac{2mM}{M+m}v_0$$

これの絶対をとれば，力積の大きさが求まる。

(5)反発係数 e は，衝突前後の相対速度の比である。

$$e=-\frac{v-V}{v_0}=-\frac{\dfrac{m-M}{m+M}v_0-\dfrac{2m}{m+M}v_0}{v_0}=1 \qquad \cdots(答)$$

(弾性衝突なので当然である。)

18. (解説)床や壁などと斜めに衝突する際，一般に床や壁に対して垂直な方向の力のみが働くので速度の壁，床に垂直成分のみが変化し，平行な成分は変化しない。壁や床が動かない場合は，はねかえり係数 e として，速度の垂直成分が e 倍になるだけである。

$e<1$ の場合，繰り返し衝突するとエネルギーを失い，いずれはね返らなくなる。

(1)水平投射であるので

$$h_0=\frac{1}{2}gt_0^2 \quad \therefore \quad t_0=\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答) \qquad L=u_0t_0=u_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

(2)A_1 で衝突直前の速度の鉛直成分を υ_0，衝突直後を υ_1 とする。

$$\upsilon_0^2=2gh_0 \quad \therefore \quad \upsilon_0=\sqrt{2gh_0} \qquad これより， \qquad \upsilon_1=e\upsilon_0=e\sqrt{2gh_0}$$

ゆえに，衝突直後の速さは

$$\sqrt{u_0^2+\upsilon_1^2}=\sqrt{u_0^2+2e^2gh_0} \quad \cdots(答)$$

(3)衝突前後でエネルギーの変化量 ΔE は

$$\Delta E=\frac{1}{2}m(u_0^2+\upsilon_1^2)-\frac{1}{2}m(u_0^2+\upsilon_0^2)=-(1-e^2)mgh_0$$

失ったエネルギーは， $(1-e^2)mgh_0$ $\cdots$(答)

(4)鉛直方向を考えて

$$0-\upsilon_1^2=-2gh_1 \quad \therefore \quad h_1=\frac{\upsilon_1^2}{2g}=e^2h_0 \quad \cdots(答)$$

(5) $\upsilon_1t_1-\frac{1}{2}gt_1^2=0$ より， $t_1=0,\frac{2\upsilon_1}{g}$

$t_1=0$ は不適であるので， $t_1=\frac{2\upsilon_1}{g}=2e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$ $\cdots$(答)

$$L_1=u_0t_1=2eu_0\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

(6)速さ u_0 で，床上を等速直線運動する。 $\cdots$(答)

(7)A_2 で衝突してから次に衝突するまでの時間 t_2 は， $t_2=2e^2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$

同様に，n 回目の衝突から，$n+1$ 回目の衝突までの時間 t_n は

$$t_n=2e^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}}$$

はじめからの合計時間は，

$$t_0+t_1+t_2+\blacksquare+t_n\,\blacksquare=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2e\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+2e^2\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+\blacksquare+2e^n\sqrt{\frac{2h_0}{g}}+\blacksquare$$

$$=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left\{1+2(e+e^2+\blacksquare\, e^n+\blacksquare)\right\}$$

$e<1$ であるのでこの数列は収束する。ゆえに，有限時間内に小球ははね返らなくなる。それまでの時間 T は，

$$T=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left\{1+2(e+e^2+\blacksquare+e^n+\blacksquare\right\}=\sqrt{\frac{2h_0}{g}}\left(1+\frac{2e}{1-e}\right)=\frac{1+e}{1-e}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

水平方向の速さは u_0 で一定であるので，

$$L=u_0T=\frac{(1+e)u_0}{1-e}\sqrt{\frac{2h_0}{g}} \quad \cdots(答)$$

(8)投げ出したときの力学的エネルギーは $\dfrac{1}{2}mu_0^2+mgh_0$ で，はね上がらなくなったときの力学的エネルギーは，$\dfrac{1}{2}mu_0^2$ であるので，失ったエネルギーは，mgh_0 …(答)

19. (解説)衝突の際，一方の物体の質量が十分大きく，速度が変化しないと考えられる場合がある（気体分子と動くピストンの衝突など）。この場合も，はねかえり係数は，衝突前後の相対速度の比として与えられる。

また，この問題の場合，板は等速なので，板から見ても物理法則は同じである(慣性系)であることを利用すると，解きやすい。

(1)鉛直上方を正として，衝突後の小球の速度を v_1 とする。はねかえり係数の式より

$$1=-\frac{v_1-V}{-v_0-V} \qquad \therefore\quad v_1=v_0+2V \qquad \text{鉛直上向きに速さ}\,v_0+2V \quad \cdots(\text{答})$$

(2)小球の受けた力積 I は，小球の運動量変化を求めればよい。

$$I=mv_1-m(-v_0)=2m(v_0+V)$$

(3)小球と板が再び同じ高さになるまでの時間を t として，

$$(v_0+2V)t-\frac{1}{2}gt^2=Vt \qquad \therefore\quad t=0,\frac{2(v_0+V)}{g}$$

$t=0$ は，はじめに衝突した時刻で不適。ゆえに，$\dfrac{2(v_0+V)}{g}$ …(答)

そのときの小球の速度 v_2 は，

$$v_2=(v_0+2V)-gt=-v_0 \qquad \text{鉛直下向きに速さ}\ v_0 \quad \cdots(\text{答})$$

(4)1 回目の衝突と 2 回目の衝突で，小球と板との相対的な関係は同じである。したがって，全体が鉛直上向きに V で動きながら同じ運動を繰り返す。

(参考)この運動を等速運動する板から見ると，小球が板に対して鉛直下向きの速さ v_0+V で衝突すると考えられる。はねかえり係数が 1 であるので，衝突後，小球は鉛直上向きに速さ v_0+V で鉛直投射されたのと同じである。ゆえに，再び板と衝突するとき，小球は鉛直下向きの速さ v_0+V である。以後，この運動をくり返す。

(5)板から小球の運動を見る。はじめの衝突の直前，小球の板に対する相対速度は鉛直下向き v_0+V で，衝突直後の相対速度は，鉛直上向き $e(v_0+V)$ となる。ゆえに 2 回目に衝突する直前の小球の相対速度は，鉛直下向き $e(v_0+V)$ なので，それまでの時間 t_1 は

$$e(v_0+V)-gt_1=-e(v_0+V) \qquad \therefore\quad t_1=\frac{2e(v_0+V)}{g}$$

2 回目の衝突直後，小球の相対速度は鉛直上向き $e^2(v_0+V)$ となる。同様に考えて，2 回目から 3 回目の衝突までの時間 t_2 は，$t_2=\dfrac{2e^2(v_0+V)}{g}$

以後も同じように考えて，はね上がっている時間の合計 T を考えると，

$$T=t_1+t_2+\cdot+t_n+\cdot=\frac{2(v_0+V)}{g}(e+e^2+\cdot+e^n+\cdot)$$

$n\to\infty$ とすると，T は収束するので，有限時間内に小球ははね上がらなくなる。等比数列の和を求めて

$$T=\frac{2e(v_0+V)}{g(1-e)} \qquad \cdots(\text{答})$$

20. (解説)質量 m_A, m_B の物体 A, B からなる体系の重心の位置 x_G は，A, B の位置を x_A, x_B として

$$x_G = \frac{m_A x_A + m_B x_B}{m_A + m_B}$$

である。位置の時間変化が速度であるので，重心の速度 V_G は，A, B の速度を V_A, V_B として，

$$V_G = \frac{m_A V_A + m_B V_B}{m_A + m_B}$$ (位置を時間で微分するということである。)

体系外から力が働かないとき（内力のみの時），運動量が保存する（変化しない）ので上式より重心の速度は変化しない。まとめると，

内力のみが働くとき，体系の重心の速度は変化しない。つまり，初めに重心が静止していれば静止したまま。動いていれば，重心は等速直線運動をする。

(1)重心の速度 V_G は，

$$V_G = \frac{mv_0 + 0}{m + 2m} = \frac{V_0}{3}$$ …(答)

(2)衝突後のA、Bの速度をそれぞれ V_A、V_B とする。図の右向きを正として、

運動量保存則より　$mV_0 = mV_A + 2mV_B$

反発係数は 1 であるので、　$1 = -\dfrac{V_A - V_B}{V_0}$

これらを解いて，　$V_A = -\dfrac{V_0}{3}$　,　$V_B = \dfrac{2}{3}V_0$　…(答)

(3)　$$V_G = \frac{m\left(-\frac{V_0}{3}\right) + 2m \times \frac{2V_0}{3}}{m + 2m} = \frac{V_0}{3}$$ …(答)

となり，衝突前と変化していない。