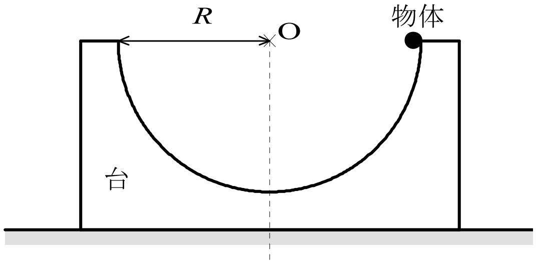
21. 目的:内力のみが働くときの，重心の位置の変化について学ぶ



図のようになめらかな水平面上に、点 O を中心とする半径 R のなめらかな半球面をもつ質量 $3m$ の台が置かれている。台の形状は O を通る鉛直線に対して対称であり，一様な材質の物質で出来ている。質量 m の小物体を、半球面の端に置き、静かに放す。重力加速度の大きさを g として、以下の問に答えよ。

(1)小物体が半球面の最下点を通過するときの、小物体および台の速度を求めよ。

(2)このとき台ははじめの位置からどちらにどれだけずれているか求めよ。

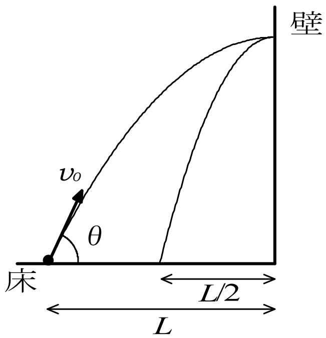
(3)小物体は最下点を通過後、半球面の反対の端に到達した。このときの、小物体および台の速度を求めよ。

(4)このとき台ははじめの位置からどちらにどれだけずれているか求めよ。

22. 目的:斜め衝突を極める。

放物運動を，方向ごとにとらえる。

以下の文中の[ア]～[シ]に適当な式，数値を答えなさい。また，下線部の問いに答えなさい。



鉛直な壁から距離 L だけ離れた水平な床の一点より，小球を速さ v_0，水平からの角 θ で投げた。小球は壁に対して直角に衝突し，壁から距離 $\dfrac{L}{2}$ の床に落下した。衝突の際，小球と壁との間に摩擦力は働かず，重力加速度の大きさを g とする。

小球を投げてから壁と衝突するまでの時間を T とすると，L, v_0, θ を用いて T =[ア]となる。また，壁の衝突した点の床からの高さは v_0, θ, g を用いて[イ]となる。小球と壁とのはねかえり係数を e とすると，衝突後の速度の水平成分の大きさは[ウ]となり，$\dfrac{L}{2}$ =【 ウ 】×[エ]より，e =[オ]である。

次に，投げる位置だけを変えて小球を投げ，壁に衝突後に投げた地点に戻ってくるようにしたい。このとき，投げた地点の壁からの距離を L'を求めよう。

問. 投げてから床に戻ってくるまで，小球の軌跡の概略を書いてみよ。

投げてから戻ってくるまでの間の小球の最高点の高さは v_0, θ, g を用いて[カ]である。小球を投げてから壁に衝突するまでの時間を t_1，壁に衝突してから床に戻ってくるまでの時間を t_2 とすると，v_0, θ, e を用いて，

L' = [キ]× t_1 =[ク]× t_2

また，t_1 ＋ t_2 =[ケ]（Tを用いて）である。これらより，e =【 オ 】を代入して，t_1をTを用いて表すと，t_1 =[コ]× T となる。また，T =【 ア 】を代入して，L'を L を用いて表すと

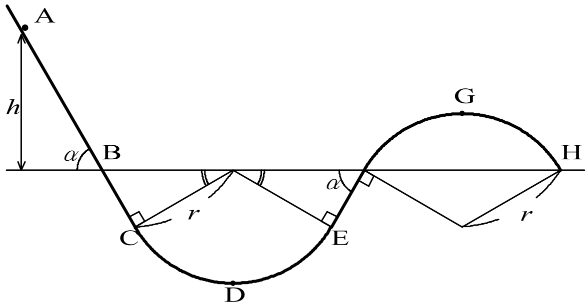
L' ＝[サ]×L

となる。また，小球の最高点は壁からの水平距離で[シ]× L だけ離れた点となる。

23. 目的:鉛直面内の円運動で成り立つ式をすぐに頭に描ける。

垂直抗力が最大，最小の位置を考える。

図のように，直線と半径 r の円弧とからなる軌道を考える。円弧は点 C，E，F で軌道の直線部分と滑らかにつながっている。初速度 0 で点 A から質量 m の球が斜面に沿ってすべり落ちるとき，球は軌道に沿って摩擦なしで運動する。点 B，F，H は水平線上にあり，直線部分 AB は水平線と角度 α をなす。重力加速度を g とし，球の半径は十分小さいとする。



(1)この球が軌道から受ける最大の抗力を求めよ。

(2)出発点 A での球の高さ h がある値 h_0 をこえると，球が運動の途中で軌道から浮き上がる。h_0 を求めよ。

(3)$h > h_0$ のとき，球が軌道から飛び上がり，点 H に落下した。このときの h の値を求めよ。

(4)高さ h を適当に選んで，球が軌道から浮き上がらずに点 G に到達するためには，角度 α がある条件を満たすことが必要である。この条件を求めよ。

21. (解説)小物体と台からなる体系を考えると，水平方向に働くのは内力のみであるので，体系の水平方向の運動量は保存する。また，はじめ体系の重心は静止しているので，重心の水平方向の位置は移動しない。

(1)最下点を通過するときの，小物体と台の速さをそれぞれ v, V とする。最下点まで台は小物体から右向きの力を受けるので，台は右向きの速度を持つ。また，体系の水平方向の運動量が 0 であるので，小物体の速度は左向きである。右向きを正として運動量保存則より

$$0=-mv+3mV$$

体系全体の力学的エネルギー保存則より，

$$mgR=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}\cdot 3mV^2$$

これら2式を解いて，　$v=\sqrt{\dfrac{3gR}{2}}$ (水平左向き)　,　$V=\sqrt{\dfrac{gR}{6}}$ (水平右向き)　　…(答)

(2)はじめの状態の O を原点に水平右向きに床に固定した x 軸をとる。台の重心の水平位置は台の中央(O を通る鉛直線上)であるので，体系の重心の x 座標 x_G は，初めの状態を考えて

$$x_G=\frac{mR}{m+3m}=\frac{R}{4}\qquad(図 1)$$

小物体が最下点に来たときの，点 O の水平座標を x(台の移動量)とする。小物体の位置も x である。体系の重心求め，重心が静止していることを利用して(図 2)

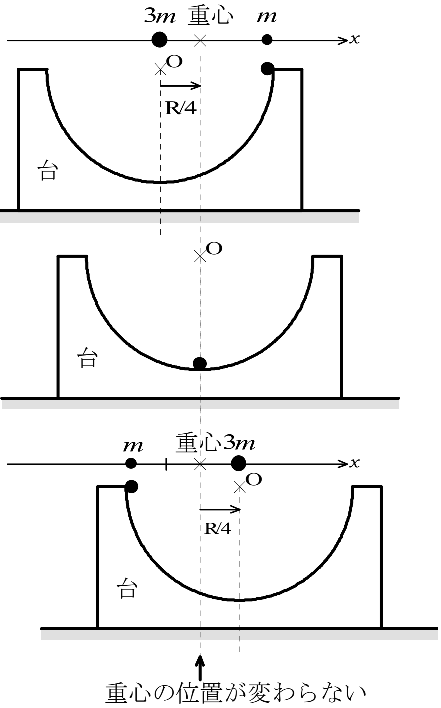
$$x_G=\frac{R}{4}=\frac{(m+3m)x}{m+3m}\qquad\therefore$$

$$x=\frac{R}{4}$$

ゆえに移動距離は $|x|=\dfrac{R}{4}$

向きは，右方向　…(答)

図 1
図 2
図 3



(3)力学的エネルギー保存則より，小物体の高さが R のとき，小物体と台の運動エネルギーの和は 0，ゆえに速度も 0 である。

(4) 図 3 のように，はじめから体系の重心の位置は移動していない。
点 O の水平座標を x' とすると，小球の位置は $x'-R$ である。(2)と同様に

$$x_G=\frac{m(x'-R)+3mx'}{m+3m}=\frac{R}{4}\qquad\therefore\quad x'=\frac{R}{2}$$

ゆえに移動距離は $|x'|=\dfrac{R}{2}$　　…(答)

22.(解説)壁との衝突では，速度の壁に垂直な成分（水平成分）のみが変化し，壁に平行な成分（鉛直成分）は変化しない。鉛直方向の運動だけを考えると，壁との衝突で影響を受けないで，単なる鉛直投射である。

(解答)速度の水平成分は $v_0\cos\theta$ で，壁と衝突するまで等速運動であるので，

$$T=\frac{L}{v_0\cos\theta}\quad\cdots①\quad\cdots(ア)$$

壁と垂直に衝突するので，このとき小球は最高点である。高さを h_0 とすると，鉛直方向の速度が 0 であるので

$$0-(v_0\sin\theta)^2=-2gh_0\qquad\therefore\quad h_0=\frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}\quad\cdots(イ)$$

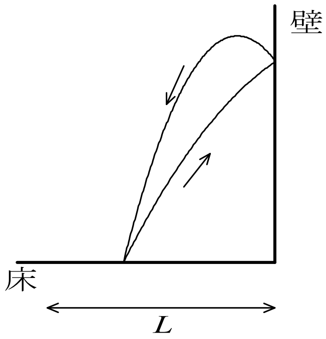
衝突後の速度の水平成分は，　$ev_0\cos\theta$　…（ウ）

壁と衝突してから，床に落下するまでの時間は T であるので，

$$\frac{L}{2}=ev_0\cos\theta\times T\quad\cdots②\qquad(エ)\ T\left(=\frac{L}{v_0\cos\theta}\right)$$

①，②式より

$$\frac{L}{2}=ev_0\cos\theta\times\frac{L}{v_0\cos\theta}\qquad\therefore\quad e=\frac{1}{2}\quad\cdots(オ)$$



問．より壁に近づく必要がある。ゆえに，最高点に達する前に壁と衝突し，その後，最高点に達し床に落下する。（右図）

鉛直方向の動きは壁との衝突で影響を受けないので，最高点の高さは h_0 で変わりない。　$h_0=\dfrac{v_0^2\sin^2\theta}{2g}$　…（カ）

衝突前後の速度の水平成分はそれぞれ，$v_0\cos\theta$，$ev_0\cos\theta$ であるので，

$$L'=v_0\cos\theta\times t_1=ev_0\cos\theta\times t_2\quad\cdots③\qquad(キ)\ v_0\cos\theta\quad(ク)\ ev_0\cos\theta$$

床に落下するまでの時間は $2T$ である。

$$t_1+t_2=2T\quad\cdots④\qquad(ケ)\ 2T$$

③，④式で $e=\dfrac{1}{2}$ として，t_1，t_2 を求めると，

$$t_1=\frac{2T}{3}\quad(コ)\ \frac{2}{3}\qquad また，\ t_2=\frac{4T}{3}$$

ゆえに，L'は，

$$L'=v_0\cos\theta\times\frac{2}{3}T=v_0\cos\theta\times\frac{2L}{3v_0\cos\theta}=\frac{2}{3}L\qquad(サ)\ \frac{2}{3}$$

投げてから最高点までの時間は T であるので，壁と衝突後，時間　$T-\dfrac{2}{3}T=\dfrac{T}{3}$ で最高点となる。衝突後の速度の水平成分は，$ev_0\cos\theta=\dfrac{1}{2}v_0\cos\theta$　なので，最高点の壁からの水平距離は

$$\frac{1}{2}v_0\cos\theta\times\frac{T}{3}=\frac{1}{2}v_0\cos\theta\times\frac{L}{3v_0\cos\theta}=\frac{L}{6}\qquad(シ)$$

23. (解説)鉛直面内の円運動なので，円の半径方向に遠心力を含んだつりあいを考えれば解けるのだが，垂直抗力が最大，最小になる位置を見抜くことが必要である。

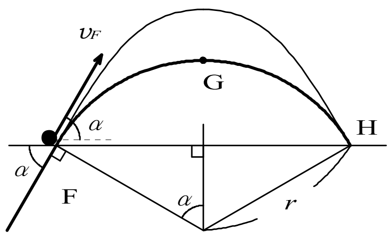


図1のような場合，半径方向のつりあいより垂直抗力 N は

$$N = mg\cos\theta + \frac{m\upsilon^2}{r}$$

となり，θ が小さいほど，また υ が大きいほど N は大きい。ゆえに垂直抗力が最大になるのは点 D である。また $N > 0$ なので，この状況で球が浮き上がることはない。

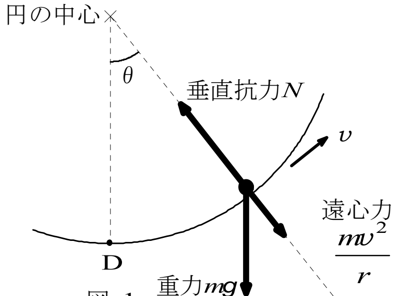


図 1

図 2 のような場合，半径方向のつりあいより垂直抗力 N は

$$N = mg\cos\theta - \frac{m\upsilon^2}{r}$$

となり，θ が大きいほど，また υ が小さいほど N は小さい。ゆえに垂直抗力が最小になるのは点 F であり，もし球が浮き上がるとすれば点 F しかない。

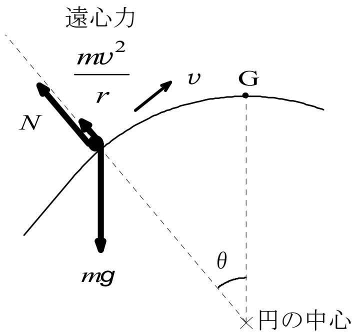


図 2

(1)点 D で最大となる。点 D での球の速さを υ_D として，力学的エネルギー保存則より

$$mg(h+r) = \frac{1}{2}m\upsilon_D^2 \qquad \cdots①$$

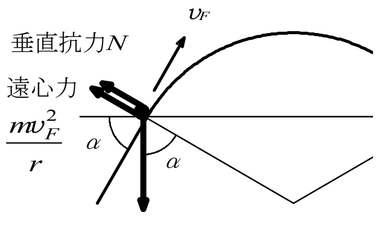
垂直抗力の大きさを N_D として，円の中心方向(鉛直方向)に，遠心力を含んだつりあいより

$$N - mg - \frac{m\upsilon_D^2}{r} = 0 \qquad \cdots②$$

①，②式より

$$N = mg + \frac{m\upsilon_D^2}{r} = \frac{mg(3r+2h)}{r} \qquad \cdots(答)$$

(2) 点 F で垂直抗力が最小であるので，点 F で垂直抗力が 0 のとき，浮き上がる。点 F での球の速さを υ_F として，力学的エネルギー保存則より



$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_F^2 \qquad \cdots③$$

垂直抗力の大きさを N として，円の中心方向に，遠心力を含んだつりあいより

$$N - mg\cos\alpha + \frac{m\upsilon_F^2}{r} = 0 \qquad \cdots④$$

③，④式より

$$N = mg\cos\alpha - \frac{m\upsilon_F^2}{r} = mg\left(\cos\alpha - \frac{2h}{r}\right)$$

$N = 0$ で浮き上がるので，このときの h が h_0 である。

$$mg\left(\cos\alpha - \frac{2h_0}{r}\right) = 0 \qquad \therefore \quad h_0 = \frac{1}{2}r\cos\alpha \qquad \cdots⑤\cdots(答)$$

(3)点 F で初速度 v_F，水平から角 α で斜方投射となる。③式より

$$v_F=\sqrt{2gh}$$

点 H に落下するまでの時間 t は

$$v_F\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=\sqrt{2gh}\sin\alpha\cdot t-\frac{1}{2}gt^2=0$$

$$\therefore\quad t=\frac{2\sqrt{2gh}\sin\alpha}{g}$$

FH 間の水平距離は $2r\sin\alpha$ であるので

$$2r\sin\alpha=v_F\cos\alpha\cdot t=\sqrt{2gh}\cos\alpha\times\frac{2\sqrt{2gh}\sin\alpha}{g}\qquad\therefore\quad h=\frac{r}{2\cos\alpha}\qquad\cdots(\text{答})$$

(4)次の二つの条件を満たす必要がある。

(ⅰ)浮き上がらないために点 F で垂直抗力が 0 以上

(ⅱ)点 G まで到達する。

(ⅰ)点 F で垂直抗力が 0 以上である条件は，h が(2)の h_0 以下である。すなわち

$$h\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha$$

(ⅱ)点 G まで到達するためには，力学的エネルギーを考えて

$$mgh\geqq mgr(1-\cos\alpha)\qquad\therefore\quad h\geqq r(1-\cos\alpha)$$

以上，2つの条件を満たすので

$$r(1-\cos\alpha)\leqq h\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha$$

$$\therefore\quad r(1-\cos\alpha)\leqq\frac{1}{2}r\cos\alpha\qquad\qquad\cos\alpha\geqq\frac{2}{3}\qquad\cdots(\text{答})$$