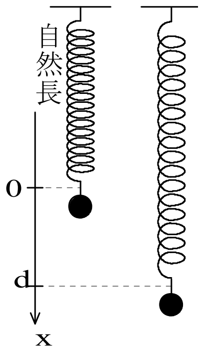
24. 目的: $f=-kx$ とならない場合の単振動について学ぶ



右の図のように，ばね定数 k のばねに，質量 m のおもりがつり下げられ，ばねの他端は天井に固定されている。ばねが自然長のときのおもりの位置を原点 O として，鉛直下向きに x 軸をとる。

おもりを鉛直下方向に $x = d$ の点まで引き下げ，静かにはなすと，おもりは鉛直上向きに動き出した。重力加速度の大きさを g として，以下の問に答えよ。

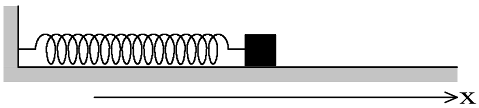
(1)おもりの位置が x のとき，おもりの加速度を a として運動方程式をつくれ。

(2)この単振動の中心の位置，角振動数，振幅を求めよ。

(3)おもりの速さの最大値を求めよ。

(4)おもりをはなした時刻を $t = 0$ とし，時刻 t のときのおもりの位置 x，速度 v を求めよ。

25. 目的: $f=-kx$ とならない場合の単振動の応用＝減衰振動について学ぶ



右の図のように，水平な床に一端を壁に固定され，他端に質量 m の物体をつけた，ばね定数 k のばねが置かれている。床と物体との間の静止摩擦係数を μ，動摩擦係数を $\frac{4}{5}\mu$ とする。ばねが自然長のときの物体の位置を原点とし，水平右向きに x 軸をとる。重力加速度の大きさを g とする。

(1)物体を引いてばねを伸ばし，静かに物体をはなしたところ，物体は床に静止したままであった。このように物体をはなしても動かない範囲で，ばねの伸びの最大値を d とする。d を求めよ。

つぎに，物体を $x = 5d$ の位置まで引いて静かにはなしたところ，物体は動き出した。動き出してからはじめて止まるまでの間について，以下の問に答えよ。

(2)物体の位置が x のとき，物体の加速度を a として運動方程式を求めよ。

(3)この単振動の中心の x 座標と振幅を，d を用いて求めよ。

(4)動き出した時刻を $t=0$ として，物体が初めて止まる時刻を求めよ。またそのときの位置を，d を用いて求めよ。

物体は一度止まった後，再び動きだした。

(5)この単振動の中心の x 座標と振幅を，d を用いて求めよ。

(6)物体が 2 回目に止まるとき位置を，d を用いて求めよ。

物体はいずれ静止して動かなくなる。

(7)物体が動かなくなった位置の x 座標を求めよ。

26. 目的:復元力による位置エネルギー，単振動のエネルギーについて学ぶ *重要！*

ばね定数 k のばねの一端を天井に固定し，他端に質量 m のおもりをつるしたところ，自然長より x_0 だけ伸びてつりあった。重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

(1) x_0 を k, m, g で表せ。

つりあいの位置を原点 O として鉛直下向きに x 軸をとる。おもりを原点（つりあいの位置）から鉛直下方に $2x_0$ だけ引き下げて静かに放す。

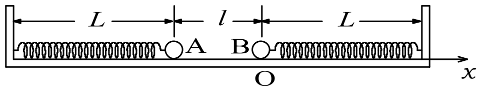
(2)おもりの位置が x のとき，おもりに働く合力を k, x で表せ。

(3)おもりの位置が x のときの位置エネルギーの，原点 O での位置エネルギーからの差を k, x で表せ。

(4)おもりが $x = x_0$ を通過するときの速さを k, m, x_0 で表せ。

(5)おもりが原点を通過するときの速さを k, m, x_0 で表せ。

27. 目的:途中から始まる単振動について学ぶ



一端を固定したばね定数 k,自然長 L の 2 つの軽いばねの他端に質量 m の小球 A,B を取り付けたものを,図のように l ($L > l$)だけ離して,水平でなめらかな床の上に置く。左側の小球 A のばねを,自然長から長さ $\frac{1}{2}l$ だけ押し縮め,小球 A に右方向のある初速度を与え,小球 A が振幅 l の単振動を行うようにする。

一方,右側の小球 B のばねを自然長から長さ $\frac{\sqrt{3}}{2}l$ だけ伸ばし,左方向に,ある初速度を与えると,小球 B は振幅 l の単振動を始める。

いま,自然の長さにあるばねに付いた小球 B の位置を原点 O,原点からの小球 B の変位を x として,原点より右方向を x の正とする。

このとき,小球 B の行う単振動を正弦関数を用いて表すと,初期位相は[(1)]であり,角振動数 ω ＝[(2)]であるので,その単振動の 1 周期分を表すと図[(3)]のようになる。また,小球 B に与えられる初速度は[(4)]である。

上記の条件のもとで 2 つの小球 A,B の単振動を同時に一直線上で始めさせると[(5)]秒後に衝突が起こる。衝突直前の小球 A がもつ運動エネルギーは[(6)]である。

24. (解説)位置座標 x にある物体に働く力の合力 f が，K，C を定数として，$f=-Kx+C$ となる場合も単振動である。単振動の中心では $f=0$ であるので，$x=\dfrac{C}{K}$ の点が中心となる。この点を原点に座標 x' をとりなおすと，物体に働く力は $f=-Kx'$ となる。ゆえに，この単振動の角振動数 ω，周期 T は，物体の質量を m として，

$$\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}\quad,\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

同じことだが，B，D を定数として加速度 a が　$a=-Bx+D$　となる場合も単振動である。

$$\omega=\sqrt{B}$$

である。

(1)ばねの伸びが x であるので，

$$ma=-kx+mg \qquad \cdots(答)$$

(2)中心の座標 x_0 とすると，　$-kx_0+mg=0$　　$\therefore\quad x_0=\dfrac{mg}{k}$　…①　…(答)

また，角振動数 ω は，　$\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　…(答)

振幅 A は，中心から端までの距離なので，　$A=d-x_0=d-\dfrac{mg}{k}$　…(答)

(静かにはなすと鉛直上向きに動き出したので，　$d>x_0$)

(3)速さが最大値 v_0 になるのは，中心を通過するときである。力学的エネルギー保存則より

$$-mgd+\frac{1}{2}kd^2=\frac{1}{2}mv_0^2-mgx_0+\frac{1}{2}kx_0^2$$

①式も用いてこれを解けばよい。　$v_0=A\sqrt{\dfrac{k}{m}}=\left(d-\dfrac{mg}{k}\right)\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　…(答)

(別解)速さの最大値＝振幅×角振動数

(別解)単振動のエネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}kA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

(4)おもりは，x_0 を中心に，$t=0$ で x が最大のところから運動するので，

$$x=x_0+A\cos\omega t=\frac{mg}{k}+\left(d-\frac{mg}{k}\right)\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad \cdots(答)$$

速度 v は，$t=0$ で $v=0$ で，その後，x 軸負の方向に動き出すので

$$v=-v_0\sin\omega t=-\left(d-\frac{mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t \qquad \cdots(答)$$

(別解)x から v を求めるのには，x を時間 t で微分すればよい。

25. (解説)摩擦のある水平面上のばねによる単振動では、動摩擦力により中心が自然長の位置よりずれる。摩擦力の向きが逆転すれば，中心も変わり，次第に振幅が小さくなり，いずれ静止する。このような振動を減衰振動と呼ぶ。

(1)ばねの弾性力が，最大静止摩擦力以下であればよいので，のび x の満たす条件は

$kx\leqq\mu mg$　　$\therefore\quad x\leqq\dfrac{\mu mg}{k}$　　ゆえに最大値 d は　　$d=\dfrac{\mu mg}{k}$　　…(答)

(2)x 負の方向に動くとき，動摩擦力は正方向に働く。運動方程式は

$$ma = -kx + \frac{4}{5}\mu mg \qquad \cdots(答)$$

(3)中心の座標 x_0 は，$a=0$ となる位置であるので

$$0 = -kx_0 + \frac{4}{5}\mu mg \qquad \therefore \quad x_0 = \frac{4\mu mg}{5k} = \frac{4}{5}d \qquad \cdots(答)$$

単振動の正方向の端は，$x=5\mathrm{d}$ であるので，振幅 A_1 は

$$A_1 = 5d - \frac{4}{5}d = \frac{21}{5}d \qquad \cdots(答)$$

(4)単振動の $\frac{1}{2}$ 周期である。この単振動の周期 T は，$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であるので，初めて静止する時刻 t_1 は，

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \cdots(答)$$

そのときの位置 x_1 は，単振動の負方向の端なので

$$x_1 = 5d - 2A_1 = -\frac{17}{5}d \qquad \cdots(答)$$

(5) x 正の方向に動くとき，動摩擦力は負方向に働く。運動方程式は

$$ma = -kx - \frac{4}{5}\mu mg$$

この単振動の中心の座標 x'_0 は，

$$0 = -kx'_0 - \frac{4}{5}\mu mg \qquad \therefore \quad x'_0 = -\frac{4\mu mg}{5k} = -\frac{4}{5}d \qquad \cdots(答)$$

単振動の負方向の端が x_1 であるので，振幅 A_2 は，

$$A_2 = x'_0 - x_1 = -\frac{4}{5}d - \left(-\frac{17}{5}d\right) = \frac{13}{5}d \qquad \cdots(答)$$

(6)単振動の正方向の端なので，位置 x_2 は，

$$x_2 = x_1 + 2A_2 = -\frac{17}{5}d + 2\times\frac{13}{5}d = \frac{9}{5}d$$

(7)(1)より静止した位置の座標 x が，$-d \leqq x \leqq d$ の範囲であるとき，動き出さない。

位置 x_2 から動くとき中心の座標は x_0 であるので，振幅 A_3 は，

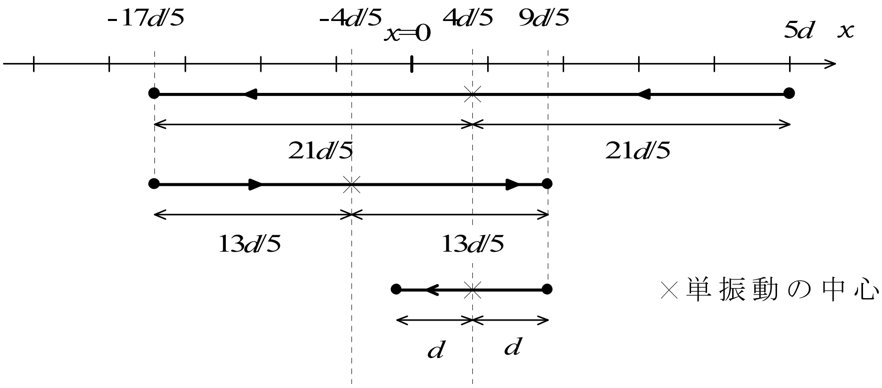
$$A_3 = \frac{9}{5}d - \frac{4}{5}d = d$$

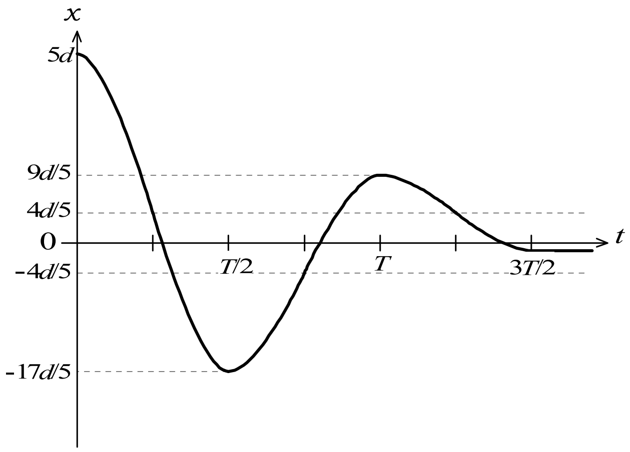
ゆえに次に静止する位置 x_3 は

$$x_3 = x_2 - 2A_3 = \frac{9}{5}d - 2\times d = -\frac{d}{5}$$

条件を満たすので，静止摩擦により動かない。ゆえに，$-\frac{d}{5}$ $\cdots$(答)

(参考)この動きを図，及びグラフにすると下図になる。





26. (解説)単振動の中心を原点として座標軸 x をとると，単振動する物体に働く合力 f は，必ず K を定数として $f=-Kx$ となる。この力には，物体に働く全ての力を含んでいる。

ゆえに，物体に働く力の位置エネルギーの総計 U は，$U=\dfrac{1}{2}Kx^2$ となる。これを「単振動の位置エネルギー」あるいは「復元力による位置エネルギー」という。この考え方を使う場合は，必ず，単振動の中心(合力が 0 になる点)を原点とすること。

なお，この考え方が難しい場合は，物体に働く力の位置エネルギーや仕事を個別に考えて，力学的エネルギーを考えれば，計算は大変だが必ず解ける。

(1)おもりに働く力のつりあいより，

$$mg-kx_0=0 \qquad \therefore \quad x_0=\frac{mg}{k} \qquad \cdots①$$

(2)合力を f とする。ばねの伸びは，x_0+x であるので，合力 f は，①式も使って

$$f=mg-k(x_0+x)=-kx$$

(3)重力の位置エネルギーの基準を原点とする。x のところでの位置エネルギーを U，原点での位置エネルギーを U_0 とすると，①式も使って

$$U=-mgx+\frac{1}{2}k(x_0+x)^2=-mgx+\frac{1}{2}kx_0^2+kx_0x+\frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kx_0^2+\frac{1}{2}kx^2$$

$$U_0=\frac{1}{2}kx_0^2$$

ゆえに，差は

$$U-U_0=\frac{1}{2}kx^2$$

(研究)おもりに働く重力と弾性力の合力が$-kx$であるので，原点を基準として，合力による位置エネルギー(＝単振動の位置エネルギー)は当然，$\frac{1}{2}kx^2$　になる。

(4)求める速さを v_1 として，単振動の位置エネルギーを使って，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}k(2x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore \quad v_1 = x_0\sqrt{\frac{3k}{m}}$$

(5)同様に，原点での速さを v_0 として

$$\frac{1}{2}k(2x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \therefore \quad v_0 = 2x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

(別解)単振動の中心を通過するときの速さなので，振幅×角振動数で求まる。

(参考)単振動のエネルギーを使わずに，単純に力学的エネルギー保存則で求めても良い。
重力による位置エネルギーの基準を原点として

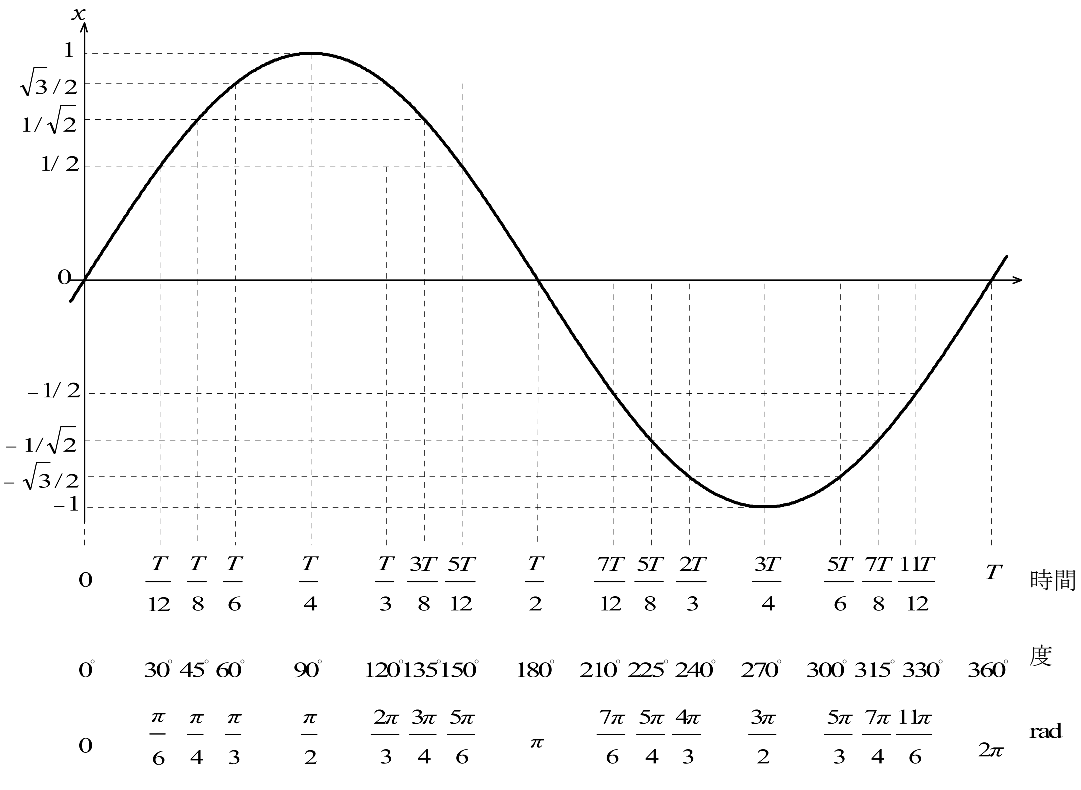
(4)　$$-2mgx_0 + \frac{1}{2}k(3x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgx_0 + \frac{1}{2}k(2x_0)^2$$

①式も用いてこれを解く。　$v_1 = x_0\sqrt{\frac{3k}{m}}$

(5)　$$-2mgx_0 + \frac{1}{2}k(3x_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore \quad v_0 = 2x_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

27. (解説)単振動の中心でもなく，両端でもないところから始まる単振動の問題である。正弦関数の性質をよく考えて，単振動を始めた状態が，sin カーブのどの位置に相当するのかをよく考えよう。

図の正弦曲線で，横軸を θ に置き換えるとわかりやすいかもしれない。私の場合，θ を“ラジアン”でなく，“度”で考える。

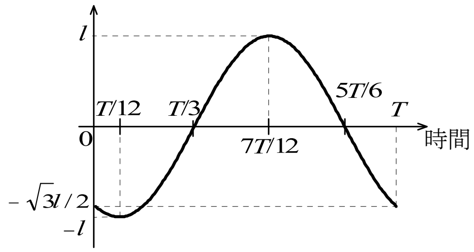


(1)振幅 l に対して，$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}l$ の位置から始まり，はじめ x の負方向に運動するので，初期位相は $\frac{4\pi}{3}$ である。　$\frac{4\pi}{3}$　（$-\frac{2\pi}{3}$ も可）…(答)

(2)ばね定数 k，質量 m の単振動なので角振動数 ω は　$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$　…(答)

(3)　$x=-\frac{\sqrt{3}}{2}l$　から 1 周期なので，図のようになる。(図の T は周期を表す)

(3) 答



(4)はじめの速度を v_B とすると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_B+\frac{1}{2}k\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}l\right)^2=\frac{1}{2}kl^2$$

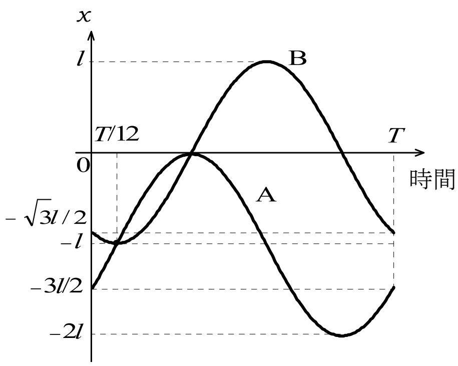
$$\therefore\quad v_B=\pm\frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

はじめに x の負方向に動くので　$v_B=-\frac{l}{2}\sqrt{\frac{k}{m}}$　…(答)

(5)A は $x=-l$ を中心とし，振幅 l であるので，左端が $x=-2l$，右端が $x=0$ の単振動となる。

はじめの位置が $x=-\frac{3}{2}l$ である。これらのことを考えて図に描く。位相では 330° から振動が始まったと考える。
同様に B は位相で 240° から振動が始まったと考える。

B も描いて交点を求めると，時刻 $\frac{T}{12}$ で同じ



変位となり，衝突することになる。周期 T は $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ であるので

$$\frac{T}{12}=\frac{\pi}{6}\sqrt{\frac{m}{k}}\qquad\cdots(答)$$