28. 目的:重心から見た単振動について学ぶ。

以下の文中の[①]～[⑭]に適当な式を求めよ。

なめらかな水平面上に自然の長さが l_0 でばね定数 k のばねがある。質量 m の小球A、Bをばねに衝突させる。ばねの質量は無視でき，衝突の際，力学的エネルギーが失われることは無く，小球の運動は，ばねを含む一直線上に限定されるものとする。また図の右向きを正とする。

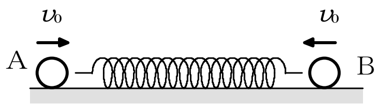


図 1

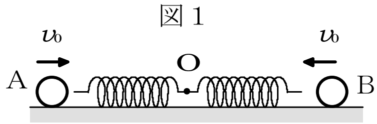


図 2

Ⅰ．図1のように、小球Aに右向きに速さ v_0、Bに左向きに速さ v_0 の初速度を与えた。A、B は、同時にばねの左端と右端にぶつかった。このときを時刻 $t=0$ とする。

ばねが最も縮んだときの長さは[①]である。また，小球 A, B からなる体系の重心の速度は[②]である。

小球 A, B の運動を重心から観測してみる。重心の位置は，常にばねの中点(O とする)であるので，図 2 のように，重心から左右に，長さがそれぞれ $\dfrac{l_0}{2}$ で，ばね定数[③]の 2 本のばねに小球 A, B が衝突するのと同じである。ゆえにばねと接している間，小球 A, B は,単振動する。小球がばねと衝突してからばねが最も縮むまでの時間は[④]である。また，小球 A, B の単振動の振幅はともに[⑤]である。

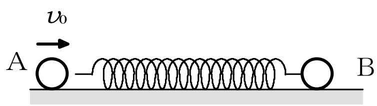


図 3

Ⅱ．図 3 のように、小球Bをばねの右端に接触させて静止させておき、小球Aを右向きに速度 v_0 で小球に衝突させる。このときを時刻 $t=0$ とする。ばねが最も縮んだときの小球 A の速度は[⑥]で，そのときのばねの長さは[⑦]である。ばねが自然長に戻ったときの小球 B の速度は[⑧]である。

Ⅰ．と同様に，小球 A, B の運動を重心から観測しよう。小球 A, B からなる体系の重心の速度は[⑨]である。重心から見た時刻 $t=0$ での小球 B の速度は[⑩]であるので，小球 B の単振動の振幅は[⑪]である。また，ばねが最も縮んだとき，重心から見た A の速度は[⑫]であるので，床から見た速度は【 ⑥ 】となる。また，ばねが自然長に戻ったときの時刻は[⑬]で，重心から見た B の速度は[⑭]であるので，床から見た速度は【 ⑧ 】である。

29. 目的:問題文を読んで，すぐに理解する力をつけよう。

途中から始まる単振動に慣れる。

図 1 のように，地球の中心 O を通り，地表のある地点 A と地点 B とを結ぶ細長いトンネル内における小球の直線運動を考える。地球を半径 R，一様な密度 ρ の球とみなし，万有引力定数を G として以下の各問に答えよ。なお，地球の中心 O から距離 r の位置において小球が地球から受ける力は，中心 O から距離 r 以内にある地球の部分の質量が中心 O に集まったと仮定した場合に，小球が受ける万有引力に等しい。ただし，地球の自転と公転の影響，トンネルと小球の間の摩擦および空気抵抗は無視するものとし，地球の質量は小球の質量に比べ十分大きいものとする。

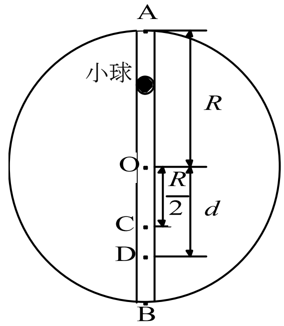


図 1

I　質量 m の小球を地点 A から静かにはなしたときの運動を考える。

(1)小球が地球の中心 O から距離 r ($r < R$)の位置にある時，小球に働く力の大きさを求めよ。

(2)小球が運動開始後，はじめて地点 A に戻ってくるまでの時間 T を求めよ。

II　同じ質量 m を持つ二つの小球 P, Q の運動を考える。時刻 0 に小球 P を，時刻 t_1 に小球 Q を同一の地点 A で静かにはなしたところ，二つの小球は OB の中点 C で衝突した。ここで二つの小球間のはねかえり係数を 0 とし，衝突後二つの小球は一体となって運動するものとする。ただし，t_1 は問 I (2)でもとめた時間 T より小さいものとする。

(1)t_1 を T を用いて表せ。

(2)二つの小球 P, Q が衝突してからはじめて中心 O を通過するまでの時間を T を用いて表せ。

III　問 II と同様に，時刻 0 に小球 P を，時刻 t_1 に小球 Q を同一の地点 A で静かにはなした。ただし，二つの小球間のはねかえり係数は e ($0 < e < 1$)とする。

(1)二つの小球が最初に衝突した後，小球 P は地点 B に向かって運動し，地球の中心 O から距離 d の点 D において中心 O に向かって折り返した。このときの d の値をはねかえり係数 e および地球の半径 R を用いて表せ。

(2)小球 P と小球 Q が二回目に衝突する位置を求めよ。

(3)その後二つの小球は衝突を繰り返した。十分時間が経過した後，どのような運動になるか答えよ。

（東京大 2005 前期）

28. (解説) この運動で，重心は常にばねの真ん中であり，また，外力が働かない(運動量が保存する)状況なので，重心は等速運動する。(始めに静止していれば静止したまま)

そこで，重心から見た運動を考えると，重心の左右に長さが半分(ばね定数が 2 倍)のばねに，小球が 1 つついた単振動と考える。重心は等速運動なので，重心から見ると慣性力などは考える必要が無く，静止している点から見るのと物理法則は同じである(慣性系である)。ばね定数はばねの長さに反比例することに注意しよう。

Ⅰ．①運動の対称性より，ばねが最も縮んだとき小球A，Bの速度は0である。ばねの縮みを x_0 として，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{1}{2}mv_0^2\times 2=\frac{1}{2}kx_0^2 \qquad \therefore \quad x_0=v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$$

ゆえにばねの長さは、 $l_0-v_0\sqrt{\frac{2m}{k}}$ …(答)

②重心の速度 V_G は，

$$V_G=\frac{m(-v_0)+mv_0}{m+m}=0 \qquad \cdots(\text{答})$$

③ばね定数は，長さに反比例するので　$2k$　…(答)

④重心からは，自然長 $\frac{l_0}{2}$，ばね定数 $2k$ のばねに，それぞれ小球A，Bが速度 v_0 で，単振動の中心(自然長)から運動が始まるように見える。ゆえに単振動の周期 T は，$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ である。最初にばねが最も縮むまでの時間は，単振動の中心から端までなので

$$\frac{T}{4}=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad \cdots(\text{答})$$

⑤重心から見て，単振動の中心で速さ v_0 で衝突し，再び中心に戻ったとき離れるので，左向きに v_0 で離れる。　$-v_0$　…(答)

Ⅱ.⑥ばねが最も縮んだとき，小球 A，B の速度は等しく，V とする。運動量保存則より

$$mv_0=2mV \qquad \therefore \quad V=\frac{v_0}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

⑦このときのばねの縮みを x_1 とすると，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}\cdot 2mV^2+\frac{1}{2}kx_1^2$$

⑥の V を代入して，x_1 を求める。　$x_1=v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$

ゆえに長さは、 $l_0-x_1=l_0-v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$ …(答)

⑧ばねが自然長に戻ったときの小球 A，B の速度をそれぞれ v_A，v_B とする。運動量保存則より

$$mv_0=mv_A+mv_B$$

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv_A^2+\frac{1}{2}mv_B^2$$

これら2式を解いて，$v_B=0, v_0$

$v_B = 0$ は、はじめの状態で不適であるので、 $v_B = v_0$ …(答)

⑨重心の速度 V_G は

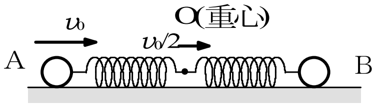
$$V_G = \frac{mv_0}{m+m} = \frac{v_0}{2}$$ …(答)

⑩重心からみた小球 B の相対速度を u_B とする。時刻 $t=0$ で

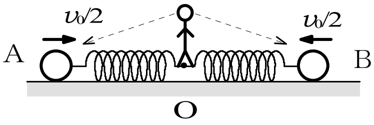
$$u_B = 0 - V_G = -\frac{v_0}{2}$$ …(答)

これより，重心から見た小球 B の運動は，自然長 $\frac{l_0}{2}$，ばね定数 $2k$ のばねに，左向き速さ $\frac{v_0}{2}$ で，単振動の中心（自然長）から運動が始まる単振動となる。同様に小球Aは，右向き速さ $\frac{v_0}{2}$ で始まる単振動となる。（右図）

$t=0$ 床から見た運動



$t=0$ 重心から見た運動



⑪小球 B の単振動の振幅を A' として，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m\left(-\frac{v_0}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 2kA'^2 \qquad \therefore \quad A' = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}$$ …(答)

(参考)小球 A の単振動の振幅も同じであり，ばねが最も縮むとき，それぞれのばねが A' だけ縮んでいるので，全体でばねの縮みは $2A' = v_0\sqrt{\frac{m}{2k}}$ となり，⑦の x_1 と一致する。

⑫最も縮むのは単振動の右端なので，重心に対する相対速度 $u_A = 0$ …(答)

床から見た小球 A の速度 $v_A = u_A + V_G = \frac{v_0}{2}$ で⑥と一致する。

⑬単振動の周期の $\frac{1}{2}$ である。ばね定数が $2k$ であることに注意して $\frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ …(答)

⑭重心から見ると単振動の中心を右向きに通過するので，相対速度 $u_B = \frac{v_0}{2}$ …(答)

(参考)床から見た小球 B の速度 $v_B = u_B + V_G = v_0$ で⑧と一致する。

29. (解説)問題文をよく読んで，地球の内部(トンネル)で物体に働く力の大きさはどうなるかを読み取ることが大切である。結論は，物体より内側にある地球の質量から万有引力となる。このちからは中心からの距離に比例し，常に中心方向を向く復元力なので，トンネル内の運動は単振動になる。

Ⅰ.(1)半径 r 内の質量を M'とすると，密度は ρ であるので

$$M' = \frac{4}{3}\pi r^3 \times \rho = \frac{4}{3}\pi\rho r^3$$

この質量が O にあるとして，これより受ける万有引力が小球に働く力なので，力の大きさ f は

$$f = \frac{GM'm}{r^2} = \frac{4\pi\rho Gm}{3}r \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)小球に働く力は常に中心 O 向きで，O からの距離に比例する復元力なので，小球は O を中心とする単振動する。O を原点とし A の方向に x 軸を取る。任意の x で加速度を a として運動方程式を作ると

$$ma = -f = -\frac{4\pi\rho Gm}{3}x$$

となり，単振動することがわかる。角振動数を ω とすると、$a = -\omega^2 x$ とかけるので

$$-m\omega^2 x = -\frac{4\pi\rho Gm}{3}x \qquad \therefore \qquad \omega = 2\sqrt{\frac{\pi\rho G}{3}}$$

ゆえに周期 T は

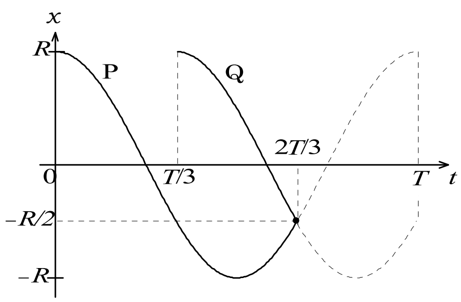
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$$

A は振動の端になる。A には単振動の 1 周期後にもどってくるので

$$T = \sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}} \qquad \cdots(\text{答})$$

Ⅱ.(1) P，Q ともに，A，B を両端とする単振動をする。P が B で折り返して $x = -\frac{R}{2}$ の C へ到達したとき，Q がはじめて C へ到達し衝突する。A を出発してから P は $\frac{2}{3}T$，Q は $\frac{T}{3}$ だけ経過している。ゆえに出発の時間差 t_1 は

$$t_1 = \frac{2}{3}T - \frac{T}{3} = \frac{T}{3} \qquad \cdots(\text{答})$$



(2)衝突直前の P，Q の速度は同じ大きさで逆向きである(それぞれ $\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$，$-\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega$)。衝突直前，直後での運動量保存則と、はねかえり係数が 0 であることより，衝突食後の小球の速度は 0 になる。

衝突後の小球は，C を端とする単振動をするので，中心までの時間は

$$\frac{T}{4} \qquad \cdots(\text{答})$$

Ⅲ.(1)衝突後の P，Q の速度をそれぞれ v_P，v_Qとする。衝突の直前直後の運動量保存則と，はねかえり係数の式より

$$m \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega - m \times \frac{\sqrt{3}}{2}R\omega = mv_P + mv_Q$$

$$e=-\frac{v_P-v_Q}{\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}R\omega\right)}$$

この 2 式より　$v_P=-\frac{\sqrt{3}}{2}eR\omega$，$v_Q=\frac{\sqrt{3}}{2}eR\omega$

距離 d は，衝突後の P の単振動の振幅なので，単振動のエネルギー保存則より

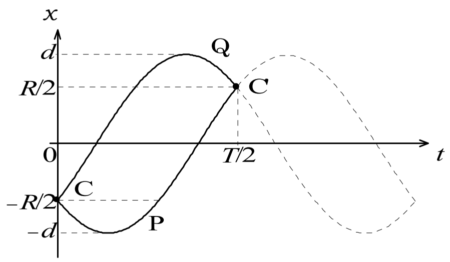
$$\frac{1}{2}mv_P^2+\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi\rho Gm}{3}\right)\left(-\frac{R}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\frac{4\pi\rho Gm}{3}\right)d^2$$

v_P, ω を代入して d を求める。

$$d=\frac{R}{2}\sqrt{1+3e^2}\qquad\cdots(\text{答})$$

(2)Q も振幅 d の単振動をする。次に衝突するのは時間 $\frac{T}{2}$ 後に，C と，O に対して対称な点 C’でである。

$x=\frac{R}{2}$ の点で衝突する。　…(答)



(3)C と C’で衝突を繰り返し，そのたびにエネルギーを失うので，最終的には C か C’で衝突後の速度が 0 となり，一体となって運動する。C と C’が単振動の両端なので

O を中心として振幅 $\frac{R}{2}$，周期 $\sqrt{\frac{3\pi}{\rho G}}$ の単振動をする。　…(答)