30. 目的:気体がどのように変化しているか，冷静に考える。

図１のように，二つの容器１，２のそれぞれに1モルの気体１，２を入れ，水平な床に固定する。これらの気体はともに理想気体とする。二つの容器は摩擦なしに水平に動くことのできるピストンＡでつながれている。ピストンＡの容器１内の底面積は S_0 であり，容器２内の底面積は $2S_0$ である。容器２にはさらに，上下に動くことのできるピストンＢがついており，その上に質量 m のおもりがのせてある。ピストンＢの底面積は S であり，その質量は無視できる。容器１には体積の無視できるヒーターが取り付けられている。ピストンＡ，Ｂと容器は熱を通さない。気体は容器の外にもれず，容器の外は真空である。気体定数を R，重力加速度を g とする。

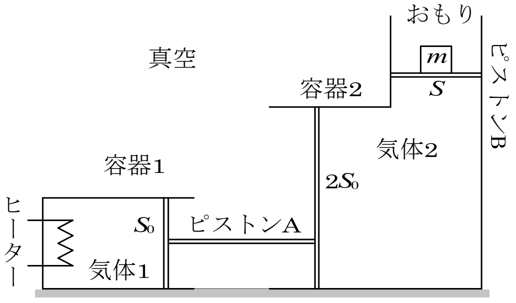


図　１

Ⅰ　ピストンＢが動かないように固定されている場合を考える。

(1)ピストンＡが静止している状態において，気体１の圧力 P_1 と気体２の圧力 P_2 の間に成り立つ関係式を書け。

(2)はじめ気体１の方が気体２より温度が低く，気体１の体積が V_1，気体２の体積が V_2 であった。ヒーターで気体１を加熱して気体１，２を等しい温度にした。このときの気体２の体積 V'_2 を，V_1，V_2 を用いて表せ。

Ⅱ　ピストンＢが摩擦なく動くことができる場合を考える。ピストンＡ，Ｂが静止している状態において，気体１の温度が T であるとき，気体１の体積 V'_1 を S，T，R，m，g を用いて表せ。

Ⅲ　問Ⅱの状態から気体１をヒーターで加熱したところ，気体１の温度は T' になり，気体２の温度は変わらなかった。また，ピストンＡは右に距離 x だけゆっくりと移動し，ピストンＢは h だけ上昇した。

(1)移動距離 x を S_0，S，h を用いて表せ。

(2)温度 T' を T，R，m，g，h を用いて表せ。

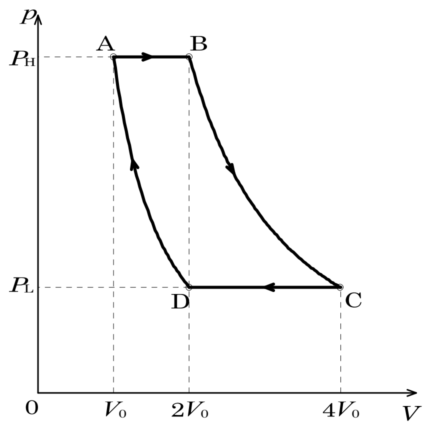
(3)気体１は単原子理想気体として，ヒーターから加えられた熱量 Q を，m，g，h を用いて表せ。

（東京大）

31．目的：状態変化の総まとめ。各変化での W, ΔU, Q を求める。

1サイクルでの熱や，仕事を求め，効率を求める。

ピストンとシリンダーからなる熱機関について考える。シリンダー内には，理想気体として扱うことができる単原子分子気体が n〔mol〕封入されている。この気体の気体定数を R〔J/(mol･K)〕とするとき，定積モル比熱は $\frac{3}{2}R$〔J/(mol･K)〕，定圧モル比熱は $\frac{5}{2}R$〔J/(mol･K)〕である。この熱機関では，気体の状態が図のように A→B→C→D→A という経路(サイクル)で変化する。状態変化 A→B および C→D は定圧変化，状態変化 B→C および D→A は断熱変化である。気体の状態を気体の圧力 p〔Pa〕と体積 V〔m³〕を組にして(p, V)で表すとき，図の各状態は，状態 A：(P_H, V_0)，状態 B：(P_H, $2V_0$)，状態 C：(P_L, $4V_0$)，状態 D：(P_L, $2V_0$)である。以下の(1)〜(9)に答えよ。ただし，気体がする仕事の符号は，気体が膨張する場合を正とし，収縮する場合を負とする。また，熱の符号は，気体が加熱される場合を正とし，冷却される場合を負とする。なお，各設問の末尾で{ } 内に記号が指示されている場合には，その記号のみを用いて解答せよ。



(1)状態 A の気体の絶対温度を求めよ。{P_H, V_0, n, R}

(2)状態変化 A→B において，気体の内部エネルギーの変化 ΔU_{AB}〔J〕と気体のする仕事 W_{AB}〔J〕を求めよ。ただし，ΔU_{AB} は，U_A, U_B をそれぞれ状態 A，状態 B の気体の内部エネルギーとするとき，$\Delta U_{AB} = U_B - U_A$ を表すものとする。{P_H, V_0}

(3)状態変化 A→B で，気体が得る熱量 Q_{AB}〔J〕を求めよ。{P_H, V_0}

(4)状態変化 B→C は断熱膨張である。このときの気体の内部エネルギーの変化を ΔU_{BC}〔J〕，気体のする仕事を W_{BC}〔J〕とするとき，W_{BC} を ΔU_{BC} で表せ。また，内部エネルギーの変化 ΔU_{BC} を求めよ。{P_H, P_L, V_0}

(5)この熱機関が1サイクル A→B→C→D→A の間に得る熱量は合計でいくらになるか。{P_H, P_L, V_0}

(6)この熱機関が 1 サイクルの間にする仕事は合計でいくらになるか。{P_H, P_L, V_0}

(7)この熱機関の熱効率を求めよ。{P_H, P_L}

(8)単原子分子理想気体の断熱変化では，$pV^{\frac{5}{3}}$ が一定に保たれることがわかっている。このため，図の状態変化における P_H と P_L は互いに独立ではない。P_H と P_L の関係を式で表せ。{P_H, P_L}

次に，この熱機関の熱効率を有効数字 2 桁で計算せよ。必要なら $2^{\frac{2}{3}} = 1.59$ を利用せよ。

(名古屋工大)

30.(解説) ピストンAが自由に動けるときは，気体1と気体2の圧力の関係は常にⅠの(1)で求めたように常に $P_1 = 2P_2$ である。

また，ピストンBが自由に動けるときは常に $P_2 = \dfrac{mg}{S}$ である。これらを元に気体の状態がどのようになっているか，冷静に判断しよう。

Ⅰ(1)ピストンAに働く力のつりあいより

$$P_1 S_0 = P_2 \cdot 2S_0 \qquad \therefore \quad P_1 = 2P_2 \quad \cdots ① \quad \cdots (答)$$

ピストンAが自由に動くとき，この関係は常に成り立つ。

(2)ピストンAが a だけ動いたとする。変化後の気体1，気体2の体積はそれぞれ

気体1: $V_1 + S_0 a$, 気体2: $V_2 - 2S_0 a$

となり，また変化後の温度を T とし，気体1，2の圧力をそれぞれ P'_1，P'_2 として，状態方程式より

気体1 : $P'_1(V_1 + S_0 a) = RT$ $\cdots ②$, 気体2 : $P'_2(V_2 - 2S_0 a) = RT$ $\cdots ③$

および，①の関係はそのまま成り立つので

$$P'_1 = 2P'_2 \qquad \cdots ④$$

②，③，④式より，$S_0 a$ を求めると

$$S_0 a = \frac{1}{4}(V_2 - 2V_1)$$

ゆえに $V'_2 = V_2 - 2S_0 a = V_1 + \dfrac{V_2}{2}$ $\cdots$(答)

Ⅱ.気体2の圧力を P''_2 とすると，ピストンBに働く力のつりあいより

$$P''_2 S = mg \qquad \therefore \quad P''_2 = \frac{mg}{S}$$

気体1の圧力を P''_1 とすると，①式の関係より

$$P''_1 = 2P''_2 = \frac{2mg}{S} \qquad \cdots ⑤$$

気体の状態方程式より，この圧力も使って

$$P''_1 V''_1 = RT \qquad \therefore \quad V''_1 = \frac{RT}{P''_1} = \frac{RST}{2mg} \quad \cdots ⑥ \quad \cdots (答)$$

Ⅲ(1)気体2の圧力は，ピストンBに働く力のつりあいを考えるとⅡと同じで変化しない。温度も同じとあるので，気体2の体積も変化しない。ゆえに

$$Sh = 2S_0 x \qquad \therefore \quad x = \frac{Sh}{2S_0} \quad \cdots ⑦ \quad \cdots (答)$$

(2)気体1の圧力も P''_1 のままである。気体の状態方程式より

$$P''_1(V''_1 + S_0 x) = RT'$$

⑤，⑥，⑦より

$$T' = \frac{\dfrac{2mg}{S}\left(\dfrac{RST}{2mg} + \dfrac{Sh}{2}\right)}{R} = T + \frac{mgh}{R} \quad \cdots ⑧ \quad \cdots (答)$$

(3)定圧変化であるので定圧モル比熱は $\dfrac{5}{2}R$ である。⑧式の T' も用いて

$$Q = \frac{5}{2}R \times (T' - T) = \frac{5}{2}mgh \qquad \cdots (答)$$

(別解)気体1のする仕事と内部エネルギーの変化を求めて，熱力学第1法則より求めてもよい。

31.(解説)熱機関の問題である。気体の状態変化の際の仕事，内部エネルギーの変化，気体に与えた熱をしっかり求められるようになろう。また，状態方程式をうまく利用し，式に使用する物理量を変換しよう。

熱機関の効率 e は，気体に与えた熱を Q_{In}，1サイクルでした仕事 W として

$$e=\frac{W}{Q_{In}}$$

である。ここで Q_{In} は気体に与えた熱の和で，気体が放出した熱は含まない。つまり1サイクルで差し引き与えた熱ではない。

熱機関は1サイクルで元に戻る。ゆえに温度も元に戻り，内部エネルギーも戻る。つまり，内部エネルギーの変化量は 0 である。ゆえに1サイクルで差し引き与えた熱を Q とすると，1サイクルでした仕事 W は，熱力学第 1 法則より

$$Q=W$$

となる。

気体が放出した熱を Q_{Out} とする。$Q_{Out}=\left|\text{放出した時の熱の和}\right|$ とすると，

$$Q=W=Q_{In}-Q_{Out}$$

となるので，効率は

$$e=\frac{Q_{In}-Q_{Out}}{Q_{In}}=1-\frac{Q_{Out}}{Q_{In}}$$

となる。

(解答)A，B，C，D の各状態での温度をそれぞれ T_A，T_B，T_C，T_D とする。気体の状態方程式をまずつくっておこう。

A: $P_HV_0=nRT_A$ …①　，　B: $2P_HV_0=nRT_B$ …②

C: $4P_LV_0=nRT_C$ …③　，　D: $2P_LV_0=nRT_D$ …④

(1)①式より　$T_A=\dfrac{P_HV_0}{nR}$　…(答)

(2)内部エネルギーの変化は，何変化であろうと求め方は同じ。

$$\varDelta U_{AB}=nC_V\varDelta T=\frac{3}{2}nR(T_B-T_A)$$

①，②式を代入して

$$\varDelta U_{AB}=\frac{3}{2}(2P_HV_0-P_HV_0)=\frac{3}{2}P_HV_0 \quad\cdots(答)$$

定圧変化であるので，仕事 ＝ 気圧×体積変化　で求まる。

$$W_{AB}=P_H(2V_0-V_0)=P_HV_0 \quad\cdots(答)$$

(3)熱力学第 1 法則より

$$Q_{AB}=\varDelta U_{AB}+W_{AB}=\frac{3}{2}P_HV_0+P_HV_0=\frac{5}{2}P_HV_0 \quad\cdots(答)$$

(別解)定圧変化であるので

$$Q_{AB}=nC_P\varDelta T=\frac{5}{2}nR(T_B-T_A)$$

①，②式を代入して求めればよい。

(4)熱の出入りがない。ゆえに熱力学第1法則より

$$0=\varDelta U_{BC}+W_{BC} \quad \therefore \quad W_{BC}=-\varDelta U_{BC} \quad\cdots(答)$$

内部エネルギーの変化の求め方は同じ。②，③式も使って

$$\varDelta U_{BC}=\frac{3}{2}nR(T_C-T_B)=\frac{3}{2}(4P_LV_0-2P_HV_0)=3(2P_L-P_H)V_0 \quad\cdots(答)$$

(5)題意は，1サイクルで差し引き与えた熱 Q を求めよということである。

状態 C から D の変化での気体に与えた熱 Q_{CD} は，定圧変化なので

$$Q_{CD} = nC_P \Delta T = \frac{5}{2}nR(T_D - T_C)$$

③，④式も使って

$$Q_{CD} = \frac{5}{2}(2P_LV_0 - 4P_LV_0) = -5P_LV_0$$

(負であるので，気体は熱を放出している)

状態 B→C と D→A は断熱変化で熱の出入りはないので，差し引き与えた熱 Q は

$$Q = Q_{AB} + Q_{CD} = \frac{5}{2}P_HV_0 - 5P_LV_0 = \frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0 \qquad \cdots(答)$$

(この熱機関では気体に熱を与えたのが A→B の過程だけ，気体から熱が放出されたのは C→D だけである。ゆえに，Q_{In} と Q_{Out} はそれぞれ

$$Q_{In} = Q_{AB} = \frac{5}{2}P_HV_0 \quad , \quad Q_{Out} = |Q_{CD}| = 5P_LV_0$$

ゆえに，1 サイクルで差し引き与えた熱は

$$Q = Q_{In} - Q_{Out} = \frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0$$

となる。)

(6)1サイクルで気体の温度は元に戻るので，内部エネルギーの変化は 0 である。ゆえに1サイクルでの仕事 W は，熱力学第 1 法則より

$$W = Q = \frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0 \qquad \cdots(答)$$

(別解)各過程での仕事をそれぞれ求めて足してもよい。(4)より

$$W_{BC} = -\Delta U_{BC} = 3(P_H - 2P_L)V_0$$

C→D は定圧変化なので

$$W_{CD} = P_L(2V_0 - 4V_0) = -2P_LV_0$$

D→A は断熱変化であるので，B→C と同様にして求める。

$$W_{DA} = -\Delta U_{DA} = -\frac{3}{2}nR(T_A - T_D) = -\frac{3}{2}(P_HV_0 - 2P_LV_0)$$

これと，(2)の W_{AB} も考えて

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} = \frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0$$

(7)状態 B→C と D→A は断熱変化で，熱の出入りはない。状態 C→D では $Q_{CD} < 0$ で気体は熱を放出している。ゆえに，気体に熱を与えたのは，状態 A→B の変化だけである。ゆえに効率は

$$e = \frac{W}{Q_{AB}} = \frac{\frac{5}{2}(P_H - 2P_L)V_0}{\frac{5}{2}P_HV_0} = 1 - \frac{2P_L}{P_H} \qquad \cdots(答)$$

(8)状態 B→C の変化について式をつくると

$$P_H(2V_0)^{\frac{5}{3}} = P_L(4V_0)^{\frac{5}{3}} \qquad \therefore \quad \frac{P_L}{P_H} = \frac{1}{2^{\frac{5}{3}}} = \frac{1}{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}}$$

これを(7)の効率の式に代入して

$$e = 1 - \frac{2}{2 \cdot 2^{\frac{2}{3}}} = 1 - \frac{1}{1.59} = 0.371\cdots \fallingdotseq 0.37 \qquad \cdots(答)$$