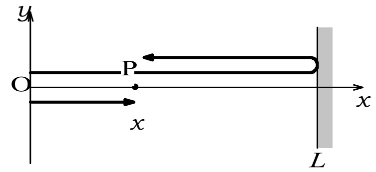
32. 目的 :波の式を作る。定常波の性質を式で考える。



図において, 原点Oの媒質は変位 $y = A\sin\dfrac{2\pi t}{T}$ で表される単振動をし, その振動が x 軸の正の向きに伝わっていく波(平面波)を考える。A〔m〕は振幅, T〔s〕は周期, t〔s〕は時間である。この平面波は距離 L〔m〕のところで, 同位相で反射する。平面波は媒質中を速度 v〔m/s〕で減衰せずに伝わり, また反射による減衰はないものとする。次の問いの[　]内に適当な式または数値を入れよ。

(1)この平面波の波長 λ〔m〕は T と v により[ア]と表せる。

(2)原点Oを発した平面波は原点Oより距離 x〔m〕($0 < x < L$)離れた点Pに遅れて到達する。平面波の速度は v であるから, 遅れの時間は v と x より[イ]と表せる。したがって, 点Pでの変位 y_1〔m〕は $y_1 =$ [ウ]と表せる。

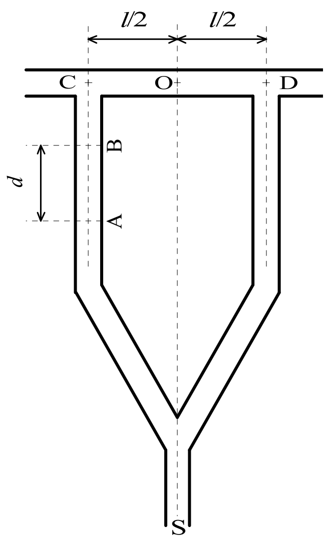
(3)原点Oから距離 L のところで反射して点Pに達した平面波(反射波)はさらに遅れる。遅れの時間は L, v と x より[エ]と表せる。反射波は同位相で反射すると仮定しているので, 点Pでの変位 y_2〔m〕は $y_2 =$ [オ]と表せる。

(4)点Pの変位 y_x〔m〕は原点から直接到達した平面波の変位 y_1 と反射波の変位 y_2 の和で求められる。y_x を積の形に書き直すと $y_x =$〔 カ]となる。

(5)(4)より, 時間によらず変位しない位置があることがわかる。L が λ に等しいとき, この位置はO～L 間に[キ]点ある。原点Oに近い点の座標を L により表すと $x =$ [ク]となる。

(2004 岐阜大・改)

33. 目的:波の干渉を, 本当にわかってますか？波の数で考えれるか？



大きな水槽中に図のような水深 h の水路をつくる。ただし, 長さ d の区間ABの水深は変えられる。水路の形は線OSに関して左右対称である。水路の一端Sから振動数 f の水面波を送り込む。この波の速さは水深の平方根に比例し,その波長は水路の幅より十分長く,AB間の長さ d,CD間の長さ l よりは十分短いとする。このとき波は水路中を正弦波として伝わるものとし,以下の設問に答えよ。

(1)全水路で水深を h としたとき,点O近くで波長 λ の定常波が見られた。点Oはこの定常波の腹か節か理由を付して答えよ。また,AB間を進む波の速さ V を求めよ。

(2)区間ABの水深をゆっくり変えると定常波の腹や節の位置は徐々にずれる。水深が h' になったとき,O→D方向に向かって測ったこのずれの距離は x となった。h' と h の比を求めよ。なお,深さが変わるところでの波の反射は無視してよい。

(3)区間ABの水深を再び h にもどし,直線部分CODに水をCからDの向きに速さ v で流す。流れは一様で,この直線部分以外には及ばないとする。C→Dに進む波とD→Cに進む波の波長をそれぞれ求めよ。また,この2つの波の点Oでの位相の差を求めよ。

(4)設問(3)で点Oが節となるような水流の速さ v の最小値を求めよ。ただし $V > v$ とする。

(東京大)

34. 目的:公式に頼らず, じっくり考えよう。ドップラー効果の基本

水面に浮かべた球を上下に振動させて水面に一定の振動数の波をたてる。身長 h の人が, 波の進行方向に一定速度 v で球から離れる向きに泳ぐ。つま先に波の山があたってから次の山がつま先にあたるまでの時間は t_0 であり,また,つま先に波の山があたってからその波の山が頭を通り過ぎるまでの時間は t_1 である。波の速度を $c(c > v)$として以下の問いに答えよ。ただし,つま先から頭までの長さを身長とする。

(1)波長 λ を c、v、t_0 を用いて表せ。

(2)波の速度 c を h,v、t_1 を用いて表せ。

次に,その球を振動数 f で振動させながら,水平方向に一定速度 $s(s < c)$で移動させる。

(3)球の進む前方の波長が λ_a であるとき,後方の波長 λ_b を λ_a,s,f を用いて表せ。

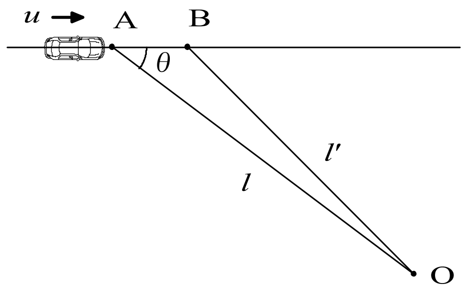
(4)波の速度 c を λ_a,λ_b,f を用いて表せ。

(5)球が進むのと同じ方向に,球の前方を人が一定速度 $v(v < c)$で泳ぐとき,彼の山が頭にあたってから次の山が頭にあたるまでの時間を c、v、s、f を用いて表せ。

(横浜国大)

35. 目的:ドップラー効果の別な考え方

斜めドップラー効果を学ぶ。



図のように水平面内の直線道路を, 速さ u で進む自動車がある。自動車は図の点 A を通過する瞬間から振動数 f_0 の警笛を鳴らし始め, 時間 Δt 後に点 B を通過するとき鳴らし終えた。音速を V とする。

この警笛の音を, 道路と同じ水平面内で道路から離れた点 O で観測することを考えよう。

自動車が点 A を通過する時刻を $t = 0$とする。AO 間の距離を l として, 点 O で音が聞こえ始める時刻 t_1 =[ア]である。自動車が点 B を通過する時刻は $t = \Delta t$ であるので, BO 間の距離を l' として点 O で音が聞こえ終わる時刻 t_2 =[イ]である。したがって点 O で音が聞こえる時間 ΔT=[ウ]となる。

AB 間の距離は[エ]であるので, ∠BAO= θ とすると, l, l', u, Δt, θ の間に[オ]の関係がある。ここで, $u\Delta t$ は l に比べて十分に小さく, $u\Delta t$ の 2 乗の項は無視し, また, $l+l' \fallingdotseq 2l$ と近似できるとすると, $l-l'$=[カ]となる。

観測者が点 O で聞く振動数 f は, f_0, Δt, ΔT を用いて表すと f =[キ]である。これと【ウ】,【カ】より, f を, V, u, f_0, θ を用いて表すと, f =[ク]となる。

32.(解説) ある点の単振動が時間をかけて伝わっていくのが波動であるので，遅れた時間を引くことで，別な点の振動を式で表せる。これが波の式である。逆向きに進む波動が重なって出来る定常波も，この式を使って表せる。この問題の(4)で求まる式

$$y = 2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)$$

が定常波を表す。この式で $2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)$ が，任意の x の地点での振動の振幅を表し，$\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)$ の部分が時間とともに振動することを表している。

$2A\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right)$ が $2A$ になる点が腹，0 になる点が節である。

(1)ア．公式より(公式じゃなくても，波は 1 周期で 1 波長進むという基本から)　$\lambda = vT$ …(答)

(2)イ．遅れの時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{x}{v} \quad \cdots(答)$$

ウ．原点より t_1 だけ遅れた振動をするので

$$y_1 = A\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_1) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right) \quad \cdots(答)$$

(さらに λ を用いると　$y_1 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{vT}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right)$　)

(3)エ．いったん壁に当たってから x に到達するまでの距離は $L+(L-x)=2L-x$ であるので，遅れの時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{2L-x}{v} \quad \cdots(答)$$

オ．ウ．と同様に

$$y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}(t-t_2) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{2L-x}{v}\right) = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right) \quad \cdots(答)$$

(さらに λ を用いると　$y_2 = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{2L-x}{vT}\right) = A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}+\frac{x}{\lambda}-\frac{2L}{\lambda}\right)$　)

(4)カ．

$$y = y_1 + y_2 = A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right) + A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)$$

$$= 2A\sin\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)+\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)}{2}\right\}\cos\left\{\frac{\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{x}{v}\right)-\frac{2\pi}{T}\left(t+\frac{x}{v}-\frac{2L}{v}\right)}{2}\right\}$$

$$= 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(-\frac{x}{v}+\frac{L}{v}\right) = 2A\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{L}{v}\right)\cos\frac{2\pi}{T}\left(\frac{x}{v}-\frac{L}{v}\right) \quad \cdots$$

(答)

(さらに λ を用いると　$y = 2A\sin 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{L}{\lambda}\right)\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)$　)

(5)キ. y の式で，$2A\cos 2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)$ が，ある x の点での単振動の振幅を表す。これが 0 の点が時間によらず振動しない点，定常波の節である。ゆえに

$$2\pi\left(\frac{x}{\lambda}-\frac{L}{\lambda}\right)=\frac{\pi}{2}(2m+1) \qquad \text{ただし，} m=0,\pm1,\pm2\cdots$$

$L=\lambda$ の条件で，$0\leqq x\leqq L$ の範囲でこれが成り立つのは

$$x=\left(\frac{5}{4}+\frac{m}{2}\right)L=\frac{L}{4},\frac{3L}{4}$$

の 2 カ所である。　　2　　…(答)

(別解)

式を使わなくても，反射による定常波なので節の位置は簡単にわかる。

自由端は腹である。腹と節の間隔は $\frac{\lambda}{4}=\frac{L}{4}$ であるので，壁に近い節の位置は

$$x=L-\frac{L}{4}=\frac{3L}{4}$$

定常波の節と節の間隔(腹と腹も)は $\frac{\lambda}{2}=\frac{L}{2}$ であるので，さらに節の位置は

$$x=\frac{L}{4},-\frac{L}{4}\cdots$$

ゆえに $0\leqq x\leqq L$ の範囲では　$x=\frac{L}{4},\frac{3L}{4}$ の 2 カ所である。

ク. 原点に近いのは　$x=\frac{L}{4}$　…(答)

33. (解説)波の位相差や干渉を考える際，距離を波長で割って波の数を考えるとわかりやすいときがある。

位相差＝2π×波の数の差

である。また，波の干渉条件も

強めあう条件：　波の数の差 $=0,1,2,\cdots=m$　$(m=0,1,2,\cdots)$

弱め逢う条件：　波の数の差 $=\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{5}{2}\cdots=\frac{1}{2}(2m+1)$　$(m=0,1,2,\cdots)$

と考えてもよい。

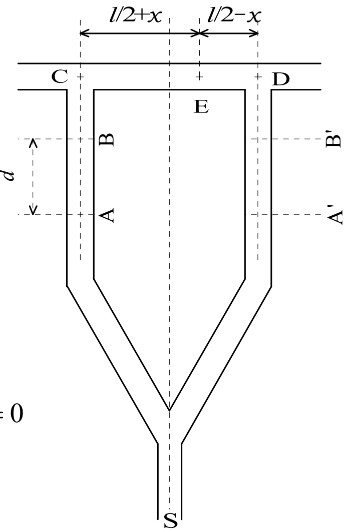
(1) 腹　…(答) (理由)両方の水路からの距離が等しく，同位相となるので強めあって腹になる。

CD 間には左右に進む波で定常波が出来る。元の波の波長は，定常波の波長と同じで λ である。波の振動数は f であるので，速さ V は

$V=f\lambda$　…(答)

(2)水深 h のときの波長を λ, 波の速さを v, 水深 h'のときの波長を λ', 波の速さを v'とすると, 速さは水深の平方根に比例するので

$$\sqrt{\frac{h'}{h}}=\frac{v'}{v}=\frac{f\lambda'}{f\lambda} \qquad \therefore \qquad \lambda'=\lambda\sqrt{\frac{h'}{h}}$$



移動した腹の位置を E とする。もともと位相差 0 の腹であるので, 左の水路と右の水路を通ってきた波の数の差は 0 である。差がつくのは, 距離の違う CE と DE, 及び波長が違うことにより AB とそれに対象な右側の水路の A'B'である。ゆえに

$$\left(\frac{\mathrm{AB}}{\lambda'}+\frac{\mathrm{CE}}{\lambda}\right)-\left(\frac{\mathrm{A'B'}}{\lambda}+\frac{\mathrm{DE}}{\lambda}\right)=\frac{d}{\lambda\sqrt{\frac{h'}{h}}}+\frac{\frac{l}{2}+x}{\lambda}-\frac{d}{\lambda}-\frac{\frac{l}{2}-x}{\lambda}=0$$

$$\therefore \quad \frac{h'}{h}=\left(\frac{d}{d-2x}\right)^2 \cdots(答)$$

(3)C→D に進む波の速さは $V+v$ であるので波長 λ_1 は

$$\lambda_1=\frac{V+v}{f}=\lambda+\frac{v}{f} \qquad \cdots(答)$$

同様に D→C に進む波の速さは $V-v$ であるので波長 λ_2 は

$$\lambda_2=\frac{V-v}{f}=\lambda-\frac{v}{f} \qquad \cdots(答)$$

また, 点 O での位相差は, 波の数の差に 2π をかければよいので

$$2\pi\left(\frac{\frac{l}{2}}{\lambda_2}-\frac{\frac{l}{2}}{\lambda_1}\right)=\pi l\left(\frac{f}{V-v}-\frac{f}{V+v}\right)=\frac{2\pi flv}{V^2-v^2}=\frac{2\pi flv}{f^2\lambda^2-v^2} \qquad \cdots(答)$$

(4)節になるには, 位相差が π の奇数倍であればよい。また, v が小さいほど位相差は小さいので, vを最小にする位相差は π である。(3)の式より

$$\frac{2\pi flv}{f^2\lambda^2-v^2}=\pi \qquad \therefore \quad v=f\left(-l\pm\sqrt{l^2+\lambda^2}\right)$$

$v>0$ であるので $\quad v=f\left(\sqrt{l^2+\lambda^2}-l\right) \qquad \cdots(答)$

34. (解説)ドップラー効果の基本である。ドップラー効果の公式に頼らずに，考えられるようになろう。

(1)図1のように，波の波長をλとすると，つま先に山 P が当たってから次の山があたるまでに人はvt_0進むので波は合計 $\lambda+vt_0$ 進む。

また波の進んだ距離はct_0とも表せるので

$$\lambda+vt_0=ct_0 \qquad \therefore \qquad \lambda=(c-v)t_0 \qquad \cdots$$

(答)

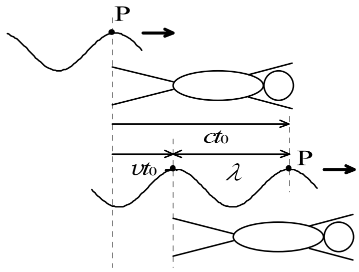


図1

(2)図2のように，波の山がつま先に当たってから頭に当たるまで，波は$h+vt_1$進む。

また波の進んだ距離はct_1とも表せるので

$$h+vt_1=ct_1 \qquad \therefore \qquad c=\frac{h}{t_1}+v \qquad \cdots$$

(答)

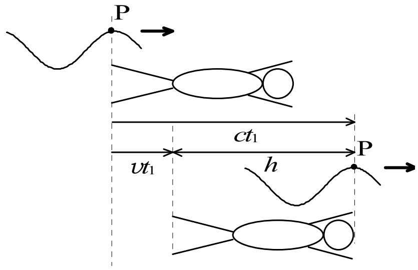


図2

(3)時間 t の間に出した波を考える。出した波の数 ft である。この間，波の先頭は ct だけすすみ，波源はst進むので，$ct-st$の間に，ft個の波があることになる。ゆえに，波１個の長さ ＝ 波長λ_aは

$$\lambda_a=\frac{ct-st}{ft}=\frac{c-s}{f} \qquad \cdots①$$

(波源が動くときのドップラー効果の基本である。)

同様に，後方も考えて

$$\lambda_b=\frac{ct+st}{ft}=\frac{c+s}{f} \qquad \cdots②$$

①，②より，c を消去してλ_bを求める。

$$\lambda_b=\lambda_a+\frac{2s}{f} \qquad \cdots(答)$$

(4)①＋②でsを消去して

$$c=\frac{\lambda_a+\lambda_b}{2}f \qquad \cdots(答)$$

(5)(1)と同様に考える。波長は λ_a であるので，山が頭に当たってから次の山が当たるまでの時間をtとして

$$\lambda_a+vt=ct$$

$$\frac{c-s}{f}+vt=ct \qquad \therefore \qquad t=\frac{c-s}{(c-v)f}$$

(参考)波源が速さs，観測者が速さvで動くので，観測者が観測する振動数f'は

$$f'=\frac{c-v}{c-s}f$$

である。山を観測してから次の山を観測するまでの時間 t は，観測者から見た周期なので

$$t=\frac{1}{f'}=\frac{c-s}{(c-v)f}$$

35.（解説）観測者が，音源の速度の方向とずれた位置にいる場合は，音源の速度の観測者方向の成分（視線速度という）により，振動数を計算すればよい。この問題は，それを導く問題である。

振動数 f_0 の音源が，時間 Δt の間に発する音波の数は $f_0\Delta t$ であり，それを観測者が，時間 ΔT で聞く場合，振動数 f は単位時間あたりの音波の数と考えて良いので，

$f=\dfrac{f_0\Delta t}{\Delta T}$ となる。これは，いつの場合でも使える。

$l-l'$ を求める近似は，他にもあるので，いろいろ考えてみると良い。

（解答）(ア)音波の速さはどの方向にも V であるので，　$t_1=\dfrac{l}{V}$

（イ）同様に，　$t_2=\Delta t+\dfrac{l'}{V}$

（ウ）点 O では，時刻 t_1 から t_2 まで音が聞こえるので，　$\Delta T=t_2-t_1=\Delta t-\dfrac{l-l'}{V}$　…①

（エ）AB $=u\Delta t$

（オ）余弦定理より，　$l'^2=l^2+(u\Delta t)^2-2lu\Delta t\cos\theta$

（カ）$u\Delta t$ の 2 乗の項を無視し，変形すると，

$$l^2-l'^2=(l+l')(l-l')\fallingdotseq 2lu\cos\theta\cdot\Delta t$$

ここで，$l+l'\fallingdotseq 2l$ として、

$$l-l'\fallingdotseq u\cos\theta\cdot\Delta t \quad \cdots②$$

（キ）音源が Δt の間に出した音波の数は，$f_0\Delta t$ で，観測者はそれを ΔT の間に聞くので，振動数 f（1 秒あたりの波の数）は，

$$f=\frac{f_0\Delta t}{\Delta T} \quad \cdots③$$

（ク）①，②式より，

$$\Delta T=\Delta t-\frac{u\cos\theta\cdot\Delta t}{V}$$

これを③式に代入して，

$$f=\frac{f_0\Delta t}{\Delta t-\dfrac{u\cos\theta\cdot\Delta t}{V}}=\frac{V}{V-u\cos\theta}f_0$$

（当然，斜めドップラー効果の公式になる）