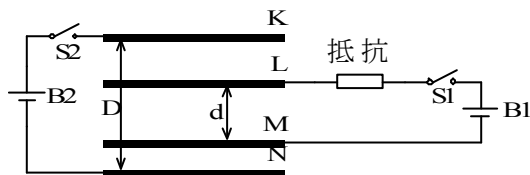


41. 目的 : ・電荷の保存則をとことん素直に使えるように。

・コンデンサーの電荷と電場の関係

極板の面積が A , 間隔が h で, 極板間が真空の平行板コンデンサーの電気容量は, 極板の端の影響を無視すると, $\frac{\epsilon_0 A}{h}$ で与えられる。ここで ϵ_0 は真空の誘電率である。

図に示すように, 面積が A の4枚の薄い金属板 K, L, M, N が, 端をそろえて真空中にお互いに平行に置かれている。金属板 KN 間の距離を D , 金属板 LM 間の距離を d ($d < D$) とする。金属板には, 抵抗, スイッチ S1, S2, および内部抵抗の無視できる電池 B1, B2 が図のように接続されている。



電池 B1 の起電力は V ($V > 0$) である。最初の状態ではスイッチ S1, S2 は開いていた。そのとき, 金属板 K, L, M, N 上の電気量はそれぞれ 0 で, すべての金属板の電位は等しかった。金属板の端の影響は無視できる。隣りあう金属板間に生じる電界(電場)はそれぞれ一様であるとして, 以下の問いに答えよ。

スイッチ S1 を閉じると抵抗が発熱し, しばらくすると発熱はとまった。このとき, 金属板 L にたくわえられた電気量は q , 金属板 M にたくわえられた電気量は $-q$ となった。

- (1) q を, V, A, D, d, ϵ_0 のうちの必要なものを用いて表せ。
- (2) 金属板 LM 間の電界の強さを, q, A, D, d, ϵ_0 のうちの必要なものを用いて表せ。
- (3) 金属板 LM 間にたくわえられたエネルギーを, V, A, D, d, ϵ_0 のうちの必要なものを用いて表せ。
- (4) 抵抗で発生した熱量を, V, A, D, d, ϵ_0 のうちの必要なものを用いて表せ。

次にスイッチ S1 を開いてからスイッチ S2 を閉じたところ, 金属板 K にたくわえられた電気量は Q ($Q > 0$) に, 金属板 N にたくわえられた電気量は $-Q$ になった。

- (5) このとき, 金属板 KL 間, および金属板 LM 間の電界の強さを, $Q, q, A, D, d, \epsilon_0$ のうちの必要なものを用いて, それぞれ表せ。
- (6) 電池 B2 の起電力を, $Q, q, A, D, d, \epsilon_0$ のうちの必要なものを用いて表せ。

次に, スイッチ S2 を開いてからスイッチ S1 を閉じた。しばらくすると, 金属板 L にたくわえられた電気量は q' に, 金属板 M にたくわえられた電気量は $-q'$ になった。

- (7) q' を $Q, q, A, D, d, \epsilon_0$ のうちの必要なものを用いて表せ。

最後に, スイッチ S1 を閉じたままスイッチ S2 を閉じた。しばらくすると, 金属板 K にたくわえられた電気量は Q から $Q + \Delta Q$ になり, 金属板 L にたくわえられた電気量は, q' から, $q' + \Delta q'$ になった。また, 金属板 M にたくわえられた電気量は $-q' - \Delta q'$ に, 金属板 N にたくわえられた電気量 $-Q - \Delta Q$ になった。

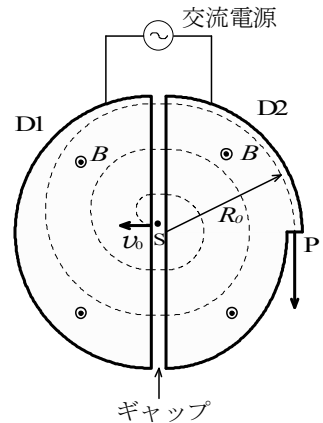
- (8) ΔQ と $\Delta q'$ を, $V, Q, A, D, d, \epsilon_0$ のうちの必要なものを用いて, それぞれ表せ。

(2004 大阪大)

42. (目的)・ローレンツ力による円運動は、完全にマスターする。

・問題を読んで理解する力、想像する力を養う。

図は荷電粒子(イオン)を加速するサイクロトロンと呼ばれる装置を上から見たものである。半円型の金属容器 D_1 , D_2 が真空中に置かれ、 D_1 , D_2 には磁束密度 B で紙面に垂直に裏から表向きの磁場がある。 D_1 と D_2 の間のごく小さな隙間(ギャップ)があり、ギャップ部分には磁場はないものとする。また D_1 , D_2 は交流電源に接続されている。ギャップに置かれたイオン発生装置から質量 m , 電荷 q のイオンを発生させ、速さ v_0 で D_1 に、ギャップとの境界に対して垂直に入射させる。重力の影響は無視できるものとして以下の問に答えよ。



- (1)イオンは図のように上から見て時計回りの円軌道を描いた。このことより、イオンの電荷が正か負か答よ。
- (2)円軌道の半径を求めよ。

イオンは D_1 中で円軌道を半周した後ギャップに戻り、ギャップで加速されて D_2 に入射する。このときギャップ間の電位差が V であったとする。

- (3)イオンが円軌道を半周する時間を求めよ。
- (4) D_2 に入射したときのイオンの運動エネルギーを求めよ。

イオンはこの運動を繰り返し、ギャップを通過するたびに加速され最終的に半径 R_0 の円軌道を描いた後、図の P から外へ取り出される。

- (5)P から出たときのイオンの運動エネルギーを求めよ。
- (6)最も効率よく加速するためには、イオンがギャップに到達するたびにギャップの電圧が最大である必要がある。そのためには交流電源の周波数はいくらであればよいか求めよ。ただし n を整数とする。

41.(解説)(解説)コンデンサーの入試標準問題である。間にある極板 L,M それぞれの上側の表面と下側の表面が、すべてコンデンサーの極板になると考える。また、「電気量保存則＝電荷は導体でつながっているところしか移動できない。総量は変化しない」と「コンデンサーの向かい合う極板に蓄えられる電気量は同じで正負が逆」という原則で解いていくこと。

また、電荷 Q 、面積 S 、誘電率 ϵ のコンデンサーの極板間の電場 E は、 $E = \frac{Q}{\epsilon S}$ となる。おぼえておいて損はしない。

(1)S2 が開いているので金属板 K,N の電荷は 0 のままである。ゆえに金属板 L の下側の表面と金属板 M の上側の表面で形成するコンデンサーに電荷 q が蓄えられていると考えればよい。金属板 L, M のコンデンサーの容量 $C_{LM} = \frac{\epsilon_0 A}{d}$ である。十分に時間経過後、抵抗に電流が流れなくなり、抵抗の両端の電圧は 0 となるので、金属板 L, M 間の電圧は V である。ゆえに、

$$q = C_{LM}V = \frac{\epsilon_0 AV}{d} \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots(\text{答})$$

(2)電場 E は、①式より $E = \frac{V}{d} = \frac{q}{\epsilon_0 A}$ $\dots(\text{答})$

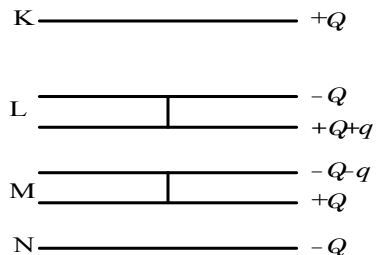
(3)金属板 L, M 間のコンデンサーの静電エネルギーを U として

$$U = \frac{1}{2}qV = \frac{\epsilon_0 A}{2d}V^2 \quad \dots(\text{答})$$

(4)金属板 K, L 間と M, N 間のエネルギーは 0 である。コンデンサーを充電するために電池がした仕事を W とする。電池を通過した電気量は q であるので、 $W = qV$ である。これがコンデンサーの静電エネルギーと抵抗で発生した熱量 J になるので

$$J = W - U = qV - \frac{1}{2}qV = \frac{1}{2}qV = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2d} \quad \dots(\text{答})$$

(5)金属板 L, M を上側の表面と、下側の表面に分けて右図のように考える。K とコンデンサーを形成する L の上側の電気量は $-Q$ である。また L の全電気量は q であるので、電気量保存則より、L の下側の電気量は $+Q + q$ である。同様に金属板 M の電気量も考えられる。(2)の結果を利用して、KL 間の電場 $E1$ と、LM 間の電場 $E2$ は



$$E1 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}, \quad E2 = \frac{Q+q}{\epsilon_0 A} \quad \dots(\text{答})$$

(6)金属板 KL の間隔を $D1$, MN の間隔を $D2$ とすると、

$$D1 + D2 = D - d$$

また、MN 間の電場は $E2$ であるので、KN 間の電位差 $= B2$ の起電力 V' は、

$$V' = E1 \times D1 + E2 \times d + E1 \times D2 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}(D1 + D2) + \frac{Q+q}{\epsilon_0 A}d = \frac{QD + qd}{\epsilon_0 A} \quad \dots(\text{答})$$

(7)S2 が開いているので、金属板 K の電荷は Q のままで、金属板 L の上面の電荷は $-Q$ である。また、S1 が閉じたので金属板 LM 間の電圧は V となり(1)の状態に戻る。ゆえに金属板 L の下面の電荷は q である。金属板 L の全電気量 q' は、

$$q' = q - Q \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots(\text{答})$$

(8)金属板 KL 間, MN 間の電圧をそれぞれ $V1, V2$ とする。ともに蓄えられている電気量は $Q + \Delta Q$ なので、

$$Q + \Delta Q = \frac{\varepsilon_0 A}{D_1} V_1 = \frac{\varepsilon_0 A}{D_2} V_2 \quad \therefore V_1 = \frac{(Q + \Delta Q)}{\varepsilon_0 A} D_1, \quad V_2 = \frac{(Q + \Delta Q)}{\varepsilon_0 A} D_2$$

金属板 LM 間は電池 B1 と接続されているので電圧 V で電気量は q である。KN 間の全電位差が V' であるので、①も利用して

$$V' = V_1 + V_2 + V$$

$$\frac{QD + qd}{\varepsilon_0 A} = \frac{(Q + \Delta Q)}{\varepsilon_0 A} (D_1 + D_2) + \frac{qd}{\varepsilon_0 A} = \frac{(Q + \Delta Q)}{\varepsilon_0 A} (D - d) + \frac{qd}{\varepsilon_0 A}$$

$$\therefore \Delta Q = \frac{d}{D - d} Q \quad \dots(\text{答})$$

また、金属板 L の総電気量を考えて、 $q' + \Delta q' = -(Q + \Delta Q) + q$ と②式より、

$$\Delta q' = -\Delta Q = -\frac{d}{D - d} Q \quad \dots(\text{答})$$

- 41.(解説) 高速の荷電粒子を用いる実験のために、さまざまな荷電粒子の加速装置が発明されているが、この問題の装置はサイクロトロンと呼ばれるものである。荷電粒子を半円形の金属容器内(その形状から)で円運動させ、繰り返しギャップを通過させ、ギャップ間の電圧で加速する。これにより大きな場所を必要とせずに荷電粒子を高速まで加速することに成功した。

磁場中の荷電粒子はローレンツ力により円運動するが、その周期は速度に無関係であることに注意しよう。

- (1) ローレンツ力は円の中心に向いて働いている。

フレミングの左手の法則より、荷電粒子の電荷は 正 $\dots(\text{答})$

- (2) ローレンツ力の大きさは $qv_0 B$ である。円運動の半径を r として、運動方程式より

$$\frac{mv_0^2}{r} = qv_0 B \quad \therefore r = \frac{mv_0}{qB} \quad \dots\text{①} \quad \dots(\text{答})$$

- (3) (問題には取えて、イオンが D_1 にあるときか、加速されて D_2 に入射してからか書いてませんが)

D_1 内を半周する時間を T とすると、①式を利用して

$$T = \frac{\pi r}{v_0} = \frac{\pi m}{qB} \quad \dots(\text{答})$$

(解答からわかるように、この時間は速度によらないので、 D_2 内で求めても同じである。)

- (4) ギャップでイオンが得るエネルギーは qV であるので、 D_2 に入射したときの運動エネルギー K は

$$K = \frac{1}{2} mv_0^2 + qV \quad \dots(\text{答})$$

- (5) P から出るときは円運動の半径は R_0 であるので、そのときの速さを v とすると、①式より

$$v = \frac{qBR_0}{m}$$

ゆえに運動エネルギー K_0 は

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{q^2 B^2 R_0^2}{2m} \quad \dots(\text{答})$$

- (6) イオンがギャップを D_1 から D_2 に通過するときは D_2 が高電位で最大電圧、逆の時は D_1 が高電位で最大電圧になっていけばよい。したがって交流電源の周波数を f とすると

$f = \frac{1}{2T}$ であればよい。また、 f がこの奇数倍でもこの条件を満たすので

$$f = \frac{2n+1}{2T} = \frac{(2n+1)qB}{2\pi m} \quad \dots(\text{答})$$