

43. 目的 : ・電磁誘導は、基本を理解すれば問題はそれほど難しくない！ということ学ぶ。

問 1 の[]に適切な数値または数式を入れ、問 2 に答えよ。

図 1 のように、紙面に垂直で一様な磁界が $x \geq 0$ の領域だけにある場合について考える。磁束密度は B [Wb/m²] で、磁界は紙面の表から裏へ向かっている。図のように、1 辺の長さが L [m] の正方形のコイル ABCD を、辺 AD が x 軸に平行になるように紙面上におき、 x 軸に平行な矢印の向きに一定の速さ v [m/s] で運動させる。頂点 A の x 座標を a [m] とし、コイルの全抵抗値を R [Ω] とする。自己誘導は無視する。

問 1 コイルが磁界の境界線をまたいでいるとき ($0 < a < L$)、コイルを貫く磁束は [(1)] [Wb] であり、微小時間 Δt [s] だけ経過すると、コイルを貫く磁束は [(2)] [Wb] だけ変化する。したがって、コイルに誘起される誘導起電力の大きさは [(3)] [V]、コイルに流れる誘導電流 (A → B → C → D の向きを正) は [(4)] [A] となる。また、コイルの速度を一定に保つためには、 x 軸の正の向きに [(5)] [N] の力を加える必要があり、このときコイルで消費される電力は [(6)] [W] である。

コイルが境界線を通過した後 ($a > L$) では、コイルに流れる電流は [(7)] [A] となる。

以上のことから、コイルの頂点 A を $a < 0$ の位置から $a > L$ の位置まで矢印の方向に一定の速さ v [m/s] で移動させたときに、速度を一定に保つために外力がした仕事は [(8)] [J] である。

問 2 次に、図 2 のように、 $0 \leq x \leq 2L$ の区間だけに一様な磁界がある場合について考える。 $a = 0$ であるときの時刻を $t = 0$ とし、コイルを x 軸に平行な矢印の向きに一定の速さ v [m/s] で移動させる。このとき、コイルに流れる電流 (A → B → C → D の向きを正)、およびコイルの速度を一定に保つために必要な力 (x 軸の正の向きを正) の時間変化を、時刻 $t = 0$ から $t = 3T_0$ [s] までの間について図示せよ。

ただし、 $I_0 = [(4)]$ [A]、 $F_0 = [(5)]$ [N]、 $T_0 = \frac{L}{v}$ [s] とおく。

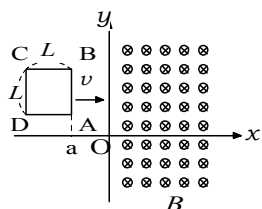


図 1

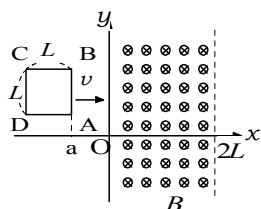
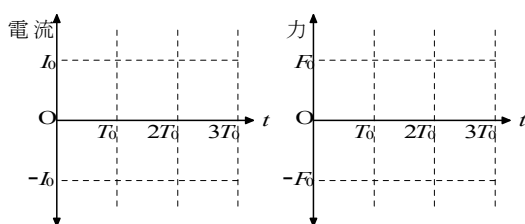


図 2



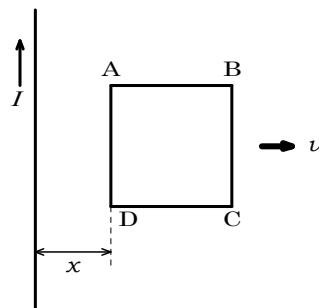
44. 目的 : ・一様でない磁場での電磁誘導の扱いになれる。

・二通りの考え方をマスターする。

右図のように真空中で十分に長い直線電線に大きさ I の定常電流が流れている。直線電線を含む平面上に、一辺の長さが a の正方形コイル ABCD がある。コイルの全抵抗値は R である。コイルの辺 DA は直線電線と常に平行で、図の向き (辺 AB と平行な方向) に一定の速さ v で動いている。

真空の透磁率を μ_0 として以下の間に答えよ。

(1) 図のように辺 AD と直線電線の距離が x のとき、直線電線にながれる電流が辺 AD 上に作る磁場の磁束密度の大きさと向きを求めよ。



- (2)図の状態からごく短い時間 Δt だけ経過した後、コイルを貫く磁束の変化量を求めよ。ただし、図の表から裏向きの磁束を正とする。
- (3)コイルに発生する起電力を求めよ。また、電流を求めよ。ただし、起電力、電流とも $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の方向を正とする。
- (4)コイルにながれる電流の大きさを i とする。辺 AD に磁場から働く力の大きさを、 i を用いて求めよ。また、向きを答よ。
- (5)このコイルを一定速度で動かすために必要な力の大きさを、 i を用いて求めよ。

45. 目的: ベータトロン。電線が無くても、電磁誘導が起こっていることを理解する。

A. 図1のように、 xy 平面上で、原点 O を中心とする半径 r の導線がある。導線の抵抗値は R とする。 z 軸の正方向に、大きさが z 軸からの距離とともに変わる磁場を加える。

いま、 z 軸から半径 r 内の磁束密度の平均が、 \bar{B} であるとする。

(1)このときコイルを貫く磁束を求めよ。

時間 Δt の間に、半径 r 内の磁束密度の平均が \bar{B} から

$\bar{B} + \Delta\bar{B}$ に増加した。

(2)このとき、コイルに流れる電流の大きさと、 z 軸の正方向から見た電流の向きを答えよ。

B. 図 2 のように、導線を取り去り、代わりに電子(質量 m 、電

荷 $-e$)を、原点 O を中心とする半径 r の円運動をさせる。円軌道上での磁束密度の大きさは一定で B とする。

(3)電子が円運動するためには、 z 軸の正方向から見てどの方向に速度を与えなければならないか。また、電子の速さ v を求めよ。

時間 Δt の間に、半径 r 内の磁束密度の平均が \bar{B} から $\bar{B} + \Delta\bar{B}$ に増加した。このとき、半径 r の円軌道上に、導線は無くても電磁誘導により誘導起電力が生じる。この起電力により、軌道上には円周に沿って円の接線方向に、一定の大きさの電場が生じる。円の一周で、

$$(\text{誘導起電力}) = (\text{電場の大きさ}) \times (\text{距離})$$

と考えることができる。

(4)電場の大きさを求めよ。また、電場の向きを答えよ。

(5)電子は電場により加速される。時間 Δt の間の電子の速度変化 Δv を、 $\Delta\bar{B}$ を用いて表せ。

電子の速度が Δv だけ変化したとき、軌道半径が r から変化しないためには、円軌道上の磁束密度も B から、 $B + \Delta B$ に変化する必要がある。

(6) ΔB を、 Δv を用いて表せ。

(7)電子が半径 r の円軌道を維持したまま加速するための、 $\Delta\bar{B}$ と ΔB の間に成り立つ関係を求めよ。

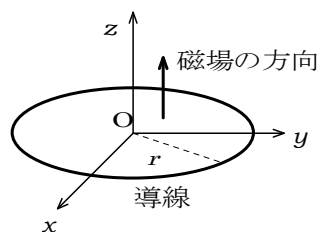


図1

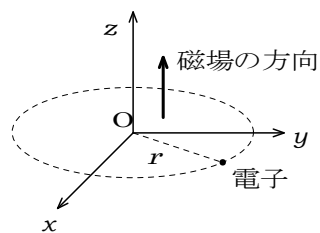
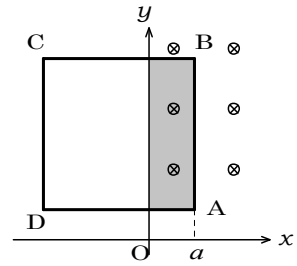


図2

43. (解説)磁場のあるところを通過することで、コイルを貫く磁束が変化するので、コイルに起電力が発生し、電流が流れる。時間 Δt でコイルを貫く磁束の変化を $\Delta\Phi$ とすると、発生する起電力 V の大きさは $|V| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right|$ で、向きはレンツの法則で求まる。



- また、コイルを横切る導体棒として考えることも出来る。
 問 1. (1)コイルのうち、面積 aL の部分に磁場がある。磁束 Φ は磁束密度 \times 面積なので $\Phi = BaL$... (答)

- (2)コイルは $v\Delta t$ だけ移動するので、面積は $Lv\Delta t$ だけ増加する。ゆえに磁束の変化量 $\Delta\Phi$ は $\Delta\Phi = BLv\Delta t$... (答)

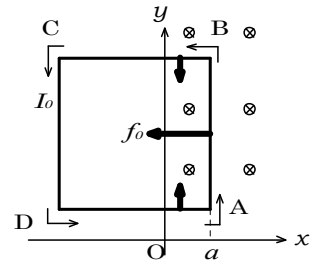
- (3)起電力の大きさ V は $V = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = vBL$... (答)

(別解)辺 AB が、磁場を横切っているので、磁場を横切る導体棒の起電力を考える。長さ L の導体棒が速さ v で運動しているので起電力 V は $V = vBL$... (答)

向きは、右手の法則より A から B 向き。

- (4)表から裏向きへの磁束が増加するので、レンツの法則より $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ の方向に起電力が発生する。他に電池等が接続されていないので、電流の向きも同じで正である。ゆえに電流 I_0 は $I_0 = \frac{V}{R} = \frac{vBL}{R}$... (答)

- (5)コイルの磁場内にある部分に、磁場からの力が働く。ただし、辺 BC, AD に働く力は打ち消しあうので考えなくて良い。辺 AB に働く力は図のように x 軸の負の向きで、大きさを f_0 とすると $f_0 = I_0BL = \frac{vB^2L^2}{R}$



コイルを等速で動かすためには、コイルに働く力が釣りあっている必要があるので、加えなければならない力は x

軸の正の向きで、大きさ $f_0 = \frac{vB^2L^2}{R}$... (答)

- (6)消費電力 P は $P = RI_0^2 = \frac{v^2B^2L^2}{R}$... (答)

- (7)コイル全体が磁場の中にあり、コイルを貫く磁束は変化しないので、起電力は 0。電流も流れない。電流 = 0 ... (答)

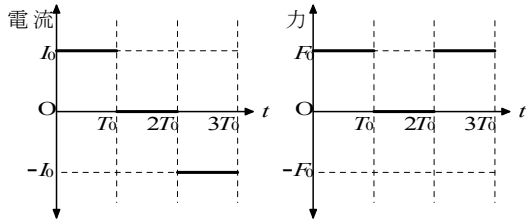
- (8)A の座標 $a = 0$ から $a = L$ までの間、電流が流れ、大きさ f_0 の力を加える必要がある。ゆえにこの力のした仕事 W は $W = f_0L = \frac{vB^2L^3}{R}$... (答)

問 2. 時刻 $t = 0$ から $t = T_0$ までは、問 1 の(1)~(6)の状態。

$t = T_0$ から $t = 2T_0$ では、コイル全体が磁場中にあり、問 1 の(7)の状態である。電流は 0 で、力も加える必要がない。

$t = 2T_0$ から $t = 3T_0$ までは、辺 AB が磁場の外に出る。問 1 と同様に考えると電流 $A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B$ に流れ $-I_0$ である。また、力は同じ方向で、大きさも f_0 である。

これらをグラフにして



44.(解説)直線電流による磁場は、直線電流から離れるほど小さくなるので、この問題のようにコイルを動かすとコイルを貫く磁束が変化し電磁誘導が起こる。コイルが微小な時間に移動する間、辺 AD, BC の位置での磁束密度の大きさは変化しないものとして、磁束の変化を求めればよい。

別解で示すが、磁束の変化ではなく、辺 AD, BC を、それぞれ磁場を横切る導体棒と考えて起電力を求めても良い。

(1)直線電流の作る磁場であるので、磁束密度の大きさ B_1 として

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \dots(\text{答})$$

(2)辺 BC の位置の磁束密度の大きさ B_2 として

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)}$$

時間 Δt の間にコイルが右図の実線から点線に移動する。移動距離は $v\Delta t$ である。磁束の変化量 $\Delta\Phi$ は奥向きを正として

$$\Delta\Phi = -B_1 a v \Delta t + B_2 a v \Delta t = \frac{\mu_0 I a v \Delta t}{2\pi} \left(-\frac{1}{x} + \frac{1}{x+a} \right) = -\frac{\mu_0 I v a^2 \Delta t}{2\pi x(x+a)} \quad \dots(\text{答})$$

(3)磁束と起電力の向きが正しく設定されているので、起電力 V は

$$V = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = \frac{\mu_0 I v a^2}{2\pi x(x+a)} \quad \dots(\text{答})$$

(磁束の向きと起電力の向きの関係に自信がなければ、大きさと向きを別々に考えても良い。向きはレンツの法則で考える。)

電流も正の向きに流れる。電流 i は $i = \frac{V}{R} = \frac{\mu_0 I v a^2}{2\pi R x(x+a)} \quad \dots(\text{答})$

(別解)辺 AD, BC を、磁場を横切る導体棒と考え、それぞれ発生する起電力の大きさを V_1, V_2 とすると

$$V_1 = v B_1 a = \frac{\mu_0 I v a}{2\pi x}, \quad V_2 = v B_2 a = \frac{\mu_0 I v a}{2\pi(x+a)}$$

向きを考えると、右図のように起電力が発生していると考え。コイル一周での起電力 V は、 $V_1 > V_2$ も考えて

$$V = V_1 - V_2 = \frac{\mu_0 I v a}{2\pi x} - \frac{\mu_0 I v a}{2\pi(x+a)} = \frac{\mu_0 I v a^2}{2\pi x(x+a)}$$

また電流は図の向きに流れ、キルヒホッフの法則より

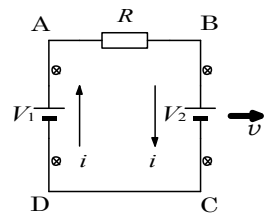
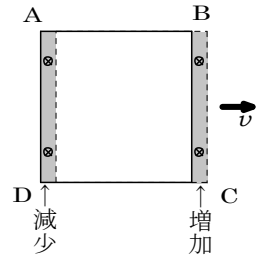
$$V_1 - V_2 = R i$$

$$i = \frac{V_1 - V_2}{R} = \frac{\mu_0 I v a^2}{2\pi R x(x+a)}$$

(4)辺 AD に流れる電流には、直線電流のつくる磁場から力が働く。力の大きさを F_1 とすると

$$F_1 = i B_1 a = \frac{\mu_0 i I a}{2\pi x} \quad \dots(\text{答})$$

フレミングの左手の法則より 左向き $\dots(\text{答})$



(5)他の辺に働く力は右図となる。辺 AB と辺 DC に働く力は打ち消し合う。

辺 BC に働く力の大きさを F_2 とすると

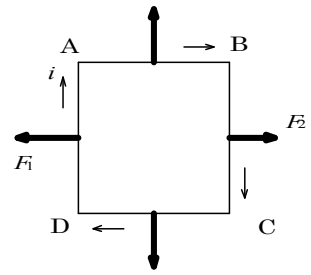
$$F_2 = iB_2a = \frac{\mu_0 iIa}{2\pi(x+a)}$$

向きは、右向きである。 $F_1 > F_2$ であることを考慮して、コイル全体に働く力の大きさ F を求めると

$$F = F_1 - F_2 = \frac{\mu_0 iIa}{2\pi x} - \frac{\mu_0 iIa}{2\pi(x+a)} = \frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi x(x+a)}$$

向きは左向きである。したがって、等速で動かすためにはその逆向きの力が必要であるので

大きさ $F = \frac{\mu_0 iIa^2}{2\pi x(x+a)}$ …(答)



45. (解説) 磁場が変化すれば、電磁誘導により起電力が生じるが、導線等が無くても、空間に電場が生じると考えられる。電場の向きは誘導起電力の向きである。この性質を利用して、電子に一定の半径の円運動をさせたまま加速する装置を、ペータロンと呼ぶ。

(1) 同様でない磁場では、コイルを貫く磁束 ϕ は、磁束密度の平均に面積をかければよい。

$$\phi = \pi r^2 \bar{B} \quad \dots(\text{答})$$

(2) 磁束密度の変化 $\Delta \phi$ は

$$\Delta \phi = \pi r^2 (\bar{B} + \Delta \bar{B}) - \pi r^2 \bar{B} = \pi r^2 \Delta \bar{B}$$

電磁誘導の法則より、発生する起電力の大きさ V は

$$V = \left| \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \right| = \pi r^2 \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t}$$

流れる電流 I は、

$$I = \frac{V}{R} = \frac{\pi r^2}{R} \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t} \quad \dots(\text{答})$$

また、レンツの法則より、 z 軸正の向きの磁場の増加を妨げるように起電力が発生する。

ゆえに向きは、 z 軸の正方向から見て、時計回り。…(答)

(3) ローレンツ力により円運動する。そのため、ローレンツ力が円の中心向きに働いていればよい。電子の電荷が負であることも考えて、電子の速度の向きは、

z 軸の正方向から見て、反時計回り。…(答)

電子の速さを v とすると、ローレンツ力の大きさは evB であり、遠心力とつりあっているので

$$\frac{mv^2}{r} = evB \quad \therefore v = \frac{erB}{m} \quad \dots\textcircled{1}$$

(4) 右図のように、起電力の向きに、円の接線方向に電場が出来ると考えてよい。電場の大きさを E とする。一周での起電力は、(2) で求めた V であるので

$$V = 2\pi r E \quad \therefore E = \frac{V}{2\pi r} = \frac{r}{2} \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t} \quad \dots(\text{答})$$

電場の向きは、起電力の向きと同じで、

z 軸の正方向から見て、時計回り。…(答)

(5) 電子は、電場の向きと逆向きに(つまり速度の方向に)大きさ eE の力を受ける。時間 Δt の間の電子の運動量変化が、電場からの力による力積であるので

$$m\Delta v = eE\Delta t = e \frac{r}{2} \frac{\Delta \bar{B}}{\Delta t} \Delta t = \frac{er\Delta \bar{B}}{2} \quad \therefore \Delta v = \frac{er\Delta \bar{B}}{2m} \quad \dots\textcircled{2} \quad \dots(\text{答})$$

(6) 時間 Δt 後に電子の速さが $v + \Delta v$ で、円軌道上の磁束密度が $B + \Delta B$ あるので、(3) と同様に、

$$\frac{m(v + \Delta v)^2}{r} = e(v + \Delta v)(B + \Delta B)$$

これと、①式を用いて ΔB を求める。

$$\Delta B = \frac{m\Delta v}{er} \quad \dots\textcircled{3} \quad \dots(\text{答})$$

(7) ②、③式より、

$$\Delta B = \frac{\Delta \bar{B}}{2} \quad \dots(\text{答})$$

ΔB と $\Delta \bar{B}$ が、この関係を満たしたまま変化すれば、電子は一定の半径のままで加速される。

