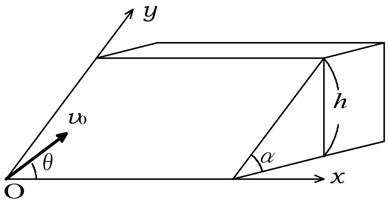
5.（斜面上の運動　目的：物体の加速度の方向をよく考える。加速度を基準に、解きやすい方向を考える）



スケートボードで斜面をかけ上がる遊びをモデル化して，質点の運動として考えてみよう。図に示すように，水平な床の上にある高さ h の壁に，なめらかな平板を角 α だけ傾けて立てかけ固定した。斜面と床が交わる辺を x 軸，それに垂直に斜面に沿って y 軸をとる。

この座標の原点 O から，質量 m の質点を x 軸となす角 θ，初速 v_0 で斜面に沿って滑らせた。板の幅は十分広いものとし，重力加速度の大きさを g として，以下の問いに答えよ。

(1)斜面上で運動している質点に働く力の x, y 成分を求めよ。
(2)滑らせ始めた瞬間を $t=0$ とするとき，時刻 t における質点の速度の x, y 成分を求めよ。
(3)斜面を越えるのに必要な初速の最小値を求めよ。

また，質点が斜面を越えないように初速 v_0 を(3)で求めた最小値より小さくして，前と同様に x 軸となす角 θ で斜面に沿って滑らせた。

(4)質点が再び床に達したときの原点からの距離 x を求めよ。
(5)角 θ を変えるとき，距離 x の最大値を求めよ。またそのときの角 θ はいくらか。

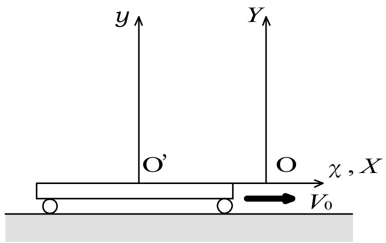
6.（気球からの斜方投射　目的：等速運動している気球から見てどんな運動になるか考える＝慣性系について学ぶ）

鉛直上向きに一定の速さ 9.8m/s で上昇している気球から、気球から見て速さ 19.6m/s で水平から 30°　上方にボールを投げた。このときの気球の地上からの高度は 24.5m であった。重力加速度の大きさを 9.80m/s²、空気の抵抗は無視でき、また気球はボールを投げた後も速度は変化しないものとする。以下の問に答えよ。

(1)地上から見てボールが最高点に達するのは、投げてから何秒後か。また、そのときの地上からの高さを求めよ。
(2)ボールが、気球から見て最高点に達するまでの時間を求めよ。また，そのときの気球から見たボールの高さを求めよ。また，気球から見たボールの速度の大きさと向きを求めよ。
(3)気球とボールが同じ高さになるのは、投げてから何秒後か。また，そのとき気球とボールの水平距離を求めよ。
(4)気球とボールが同じ高さになったとき，気球から見たボールの相対速度の大きさと向きを求めよ。
(5)ボールが地面に衝突するのは、投げてから何秒後か。また、そのときのボールの速度を求めよ。

7. (動く台車上での運動　目的：等速運動している系(慣性系)内での運動、加速度運動している系(加速度系)での運動をしっかり区別、理解して戸惑わないようになる。難しく考えない。)

水平な地上を一定の速度 V_0 で走る台車がある。地上で，台車の床面と同じ高さのある点を原点 O にとり，水平に X 軸，鉛直に Y 軸をとる。また，台車の床面上の点を原点 O'として，台車に固定した座標系を水平に x 軸，鉛直に y 軸とする。重力加速度の大きさを g とし，空気の抵抗は無視できるものとする。以下の問いに答えよ。



I. O と O'が一致した時を時刻 $t = 0$ とし，その瞬間，台車上の原点 O'から小球を，鉛直上方に初速度 v_0 で打ち上げた。

(1)時刻 t のとき，地上から見た小球の位置 X, Y を求めよ。また，台車に固定した座標系での位置 x, y を求めよ。また地上にいる観測者が見たときと，台車上の観測者が見たとき，それぞれどんな運動をするか答えよ。

(2)小球が最高点に達する時刻 t_1 と，そのときの床からの高さ h を求めよ。

小球が最高点に達すると同時に，台車を，X 軸正方向に一定の加速度 α(>0) で運動させる。

(3)時刻 t(>t_1) のとき，地上から見た小球の位置 X, Y を求めよ。また，台車に固定した座標系での位置 x, y を求めよ。必要であれば，t_1, h を用いてよい。地上にいる観測者が見たときと，台車上の観測者が見たとき，それぞれどんな運動をするか答えよ。

(4)小球が台車の床に落下する時刻および，そのときの地上から見た小球の位置 X を求めよ。

(5)小球が落下した床上の位置 x を，h, g, α で表せ。

Ⅱ. 今度は，O と O'が一致した時刻 $t = 0$ で，台車を X 軸正方向に一定の加速度 α(>0) で運動させる。

(6)時刻 $t = 0$ で，台車上の原点 O'から小球を初速度 v_0 で打ち出して，再び原点 O'に落下するようにしたい。x 軸から角 θ 上方に打ち出すとして，$\tan\theta$ の値を求めよ。

(7)小球の，地上から見た初速度の X, Y 成分を v_0, V_0, θ を用いて表せ。

5. (解説)斜面上の放物運動などは，斜面に沿って x, y 軸を取って考えると良い。斜面に沿った力の成分は，y 方向だけであるので，x–y 平面では放物運動をする。ただし，加速度も y 成分をとること。

(1)質点に働く力は，重力と斜面からの垂直抗力であるが，垂直抗力は斜面に垂直で x, y 成分はない。重力の成分のみである。

x 成分＝0　　,　　y 成分＝$-mg\sin\alpha$　　…(答)

(2)y 方向の加速度は，$-g\sin\alpha$ である。初速度の x, y 成分はそれぞれ，$v_0\cos\theta$, $v_0\sin\theta$ であるので，時刻 t の速度の x, y 成分 v_x, v_y は

$v_x = v_0\cos\theta$　　,　　$v_y = v_0\sin\theta - g\sin\alpha\cdot t$　　…(答)

(3)斜面を超えないとして y の最大値を y_0 とすると

$$0-(v_0\sin\theta)^2 = -2g\sin\alpha\cdot y_0 \qquad \therefore \quad y_0 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\sin\alpha} \qquad \cdots(答)$$

これが，斜面の y 方向の長さ $\dfrac{h}{\sin\alpha}$ より大きくなれば，斜面を超える。

$$y_0 = \frac{v_0^2\sin^2\theta}{2g\sin\alpha} \geqq \frac{h}{\sin\alpha} \qquad \therefore \quad v_0 \geqq \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta} \qquad 最小値 \quad v_0 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sin\theta} \qquad \cdots(答)$$

(4)床に達した時刻を t として，$y=0$ なので

$$0 = v_0\sin\theta\cdot t - \frac{1}{2}g\sin\alpha\cdot t^2 \qquad \therefore \quad t = 0, \frac{2v_0\sin\theta}{g\sin\alpha}$$

$t=0$ は不適である。ゆえに x は

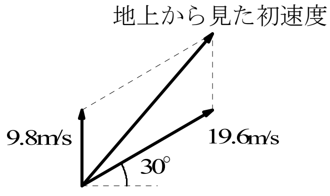
$$x = v_0\cos\theta\cdot t = \frac{2v_0^2\sin\theta\cos\theta}{g\sin\alpha} = \frac{v_0^2\sin 2\theta}{g\sin\alpha} \qquad \cdots(答)$$

(5)$0<\theta\leqq 90^\circ$ であるので，$\sin 2\theta = 1$ で x は最大となる。

$$最大値 = \frac{v_0^2}{g\sin\alpha} \qquad また，そのときの\ \theta = 45^\circ\ である。 \qquad \cdots(答)$$

6.(解説) 等速運動している観測者から見ても，物理法則は静止系と同じである。気球は等速運動しているので、気球から見ても斜方投射である。地上から見た場合と初速度が異なる。問により、地上からと，気球からの立場を使い分けて解く。

(1)地上から見たボールの初速度を考える。気球の速度と，気球から見たボールの初速度の合成であるので



地上から見たボールの初速度

水平方向：$19.6\cos 30^\circ = 9.8\sqrt{3}$m/s

鉛直方向：$9.8 + 19.6\sin 30^\circ = 19.6$m/s

ゆえに，地上から見て最高点に達するまでの時間 t_1 は

$19.6 - 9.80t_1 = 0 \qquad \therefore \quad t_1 = 2.00$s　　…(答)

また，そのときの地上からの高さは

$$24.5 + 19.6t_1 - 4.90t_1^2 = 24.5 + 19.6 \times 2.00 - 4.90 \times 2.00^2 = 44.1\mathrm{m} \qquad \cdots(答)$$

(2)気球から見た初速度は

水平方向 : $19.6\cos 30° = 9.8\sqrt{3}\mathrm{m/s}$

鉛直方向 : $19.6\sin 30° = 9.8\mathrm{m/s}$

であり，気球は等速運動をしているので，気球から見ても斜方投射である。気球から見て最高点までの時間を t_2 とすると

$$9.8 - 9.80t_2 = 0 \qquad \therefore \quad t_2 = 1.0\mathrm{s} \qquad \cdots(答)$$

また，そのときの気球からの高さは

$$9.8t_2 - 4.90t_2^2 = 9.8 \times 1.0 - 4.90 \times 1.0^2 = 4.9\mathrm{m} \qquad \cdots(答)$$

気球から見て最高点では速度の鉛直成分が 0，水平成分のみなので

$$9.8\sqrt{3} = 9.8 \times 1.73 = 16.9 \cdots \fallingdotseq 17\mathrm{m/s} \qquad \cdots(答)$$

向きは　水平方向　　$\cdots$(答)

(3)気球から見た高さが 0 なので，それまでの時間を t_3 として

$$9.8t_3 - 4.90t_3^2 = 0 \qquad \therefore \quad t_3 = 0, 2.0\mathrm{s}$$

$t_3 = 0$ は不適であるので　$t_3 = 2.0\mathrm{s}$　　$\cdots$(答)

(放物運動なので，$t_3 = 2t_2$ は当然である。)

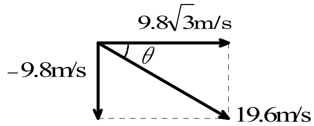
水平距離は

$$9.8\sqrt{3}t_3 = 9.8 \times 1.73 \times 2.0 = 33.9 \cdots \fallingdotseq 34\mathrm{m} \qquad \cdots(答)$$

(4)気球から見た相対速度とは，ようするに気球から見た速度なので

水平方向　$9.8\sqrt{3}\mathrm{m/s}$

鉛直方向　$9.8 - 9.80t_3 = 9.8 - 9.80 \times 2.0 = -9.8\mathrm{m/s}$



ゆえに速度の大きさは

$$\sqrt{\left(9.8\sqrt{3}\right)^2 + (-9.8)^2} = 19.6\mathrm{m/s} \qquad \cdots(答)$$

また、水平となす角を θ として

$$他\ \tan\theta = \left|\frac{-9.8}{9.8\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \therefore \quad \theta = 30°$$

向きは、水平より 30°　下向き　　$\cdots$(答)

(斜方投射なので、初速度と大きさが同じで、向きは鉛直方向のみ逆になるので当然である)

(5)地上から見て解く。地面に落下する時間を t_4 として

$$24.5 + 19.6t_4 - 4.90t_4^2 = 0$$

$$t_4^2 - 4t_4 - 5 = 0 \qquad \therefore \quad t_4 = -1, 5$$

$t_4 > 0$ より　$t_4 = 5.0\mathrm{s}$　　$\cdots$(答)

地上から見た速度は

水平方向　$9.8\sqrt{3}\mathrm{m/s}$

鉛直方向　$19.6 - 9.80t_4 = 19.6 - 9.80 \times 5.0 = -29.4\mathrm{m/s}$

ゆえに速度の大きさは

$$\sqrt{\left(9.8\sqrt{3}\right)^2 + (-29.4)^2} = 19.6\sqrt{3} = 19.6 \times 1.73 = 33.9 \cdots \fallingdotseq 34\mathrm{m/s} \qquad \cdots(答)$$

(力学的エネルギー保存則からも求められる)

7. (解説)等速運動している観測者から見ても，物理法則は静止系と同じである。台車が等速運動しているとき，台車から見た小球の運動は，台車が動いていることを意識しなくて良い。

加速度運動している観測者から見る場合は，あらゆる物体に慣性力が働いていることを考えるか，観測者から見た物体の相対加速度を考えて解けばよい。

(1)小球は地上から見て水平(X 方向)に V_0, 鉛直(Y 方向)に v_0 の初速度で放物運動する。(答)

$$X = V_0 t \quad , \quad Y = v_0 t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots(答)$$

台車から見ると，小球は初速度 v_0 の鉛直投射をする。(答)

$$x = 0 \quad , \quad y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \cdots(答)$$

(参考)台車から見た相対位置と考えても良い。台車の X 軸上での位置を $X_{台}$とすると，$X_{台} = V_0 t$ であるので，台車から見た小球の位置(相対位置：相対速度などと同じ考え方) x は

$$x = X - X_{台} = 0$$

(2)地上から見ても台車から見ても鉛直方向の運動は同じである。

$$0 = v_0 - gt \qquad \therefore \quad t_1 = \frac{v_0}{g}$$

$$h = v_0 t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = \frac{v_0^2}{2g} \quad \cdots(答)$$

(3)地上から見た場合，台車の運動は小球の運動に影響を与えないので

$$X = V_0 t \quad , \quad Y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad 地上から見て：放物運動 \quad \cdots(答)$$

台車から見た場合の小球の加速度を考える。地上から見た小球の加速度 $\vec{a} = (0, -g)$，台車の加速度 $\vec{A} = (\alpha, 0)$ であるので，台車上で見た小球の相対加速度は

$$\vec{a} - \vec{A} = (-\alpha, -g)$$

となり小球は x 負の方向に加速度 α を持つ。最高点で小球の速度は 0 であるので

$$x = -\frac{1}{2}\alpha(t - t_1)^2 \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

$$y = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad あるいは， \quad y = h - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

台車から見た加速度の向きは，図 1 のようになる。ただし，

$\tan\theta = \dfrac{g}{\alpha}$ である。

最高点で初速度が 0 なので，その後，小球は図の加速度の方向に等加速度直線運動する。　…(答)

(参考)①，②より x と y の関係式を求めると

$$y = \frac{g}{\alpha}x + h$$

で，最高点を通る直線である。

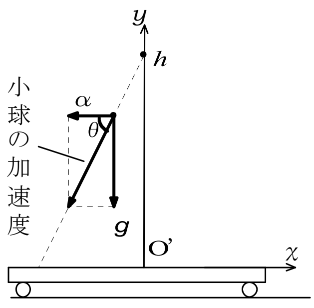


図 1

(4)落下する時刻を t_2 として，鉛直方向には加速度 g の運動であるので

$$t_2 = 2t_1 = \frac{2v_0}{g} \quad , \quad X = V_0 t_2 = \frac{2V_0 v_0}{g} \cdots(答)$$

(5) t_2 を①式に代入する。

$$x=-\frac{1}{2}\alpha(t_2-t_1)^2=-\frac{v_0^2\alpha}{2g^2}=-\frac{\alpha}{g}h\cdots(\text{答})$$

(別解)図 1 より

$$x=-\frac{h}{\tan\theta}=-\frac{\alpha}{g}h$$

(6)図 2 のように，台車から見た小球の加速度の方向に投げ出せば，戻ってくる。ゆえに，投げ出す方向は図 1 の θ となる。

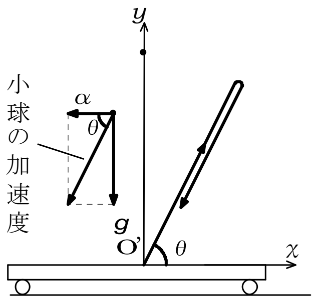


図 2

ゆえに，　$\tan\theta=\dfrac{g}{\alpha}$　$\cdots$(答)

(別解)小球の x, y 座標はそれぞれ，

$$x=v_0\cos\theta\cdot t-\frac{1}{2}\alpha t^2 \quad ,$$

$$y=v_0\sin\theta\cdot t-\frac{1}{2}gt^2$$

$y=0$ となる時刻で，$x=0$ となるようにすると、$\tan\theta$ が求まる。

(7)地上から見た小球と台車の初速度をそれぞれ $\overrightarrow{u_0}$，$\overrightarrow{V_0}$，台車から見た

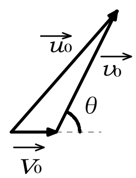


図 3

小球の初速度を $\overrightarrow{v_0}$ とすると

$$\overrightarrow{v_0}=\overrightarrow{u_0}-\overrightarrow{V_0} \qquad \therefore\ \overrightarrow{u_0}=\overrightarrow{v_0}+\overrightarrow{V_0}$$

図 3 も参考に，の X, Y 成分を求めると

X成分＝$V_0+v_0\cos\theta$　，　Y 成分＝$v_0\sin\theta\cdots$(答)