傾き角を変えることのできる斜面に，質量 m の直方体の物体が置かれている。物体の密度は一様である。斜面の傾きを変えることによって直方体が動き出す瞬間のことを考える。直方体と斜面との静止摩擦係数は μ，重力加速度の大きさを g として以下の問いに答えよ。

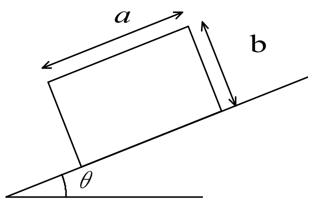

図 1

図１のように１辺の長さが a の面を斜面に置き，傾き角を徐々に増していった。

(1)傾き角が θ のとき, 物体に働く静止摩擦力の大きさを求めよ。

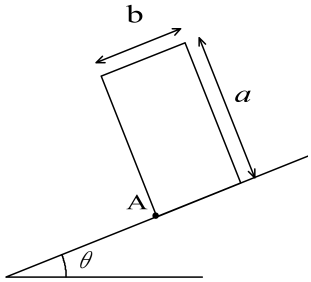

図 2

さらに傾き角を増すと，物体は回転することなく傾き角 θ_1 のとき滑り出した。

(2)$\tan\theta_1$ を求めよ。

次に，図２のように１辺の長さが b の面を斜面に置き，傾き角を徐々に増していった。傾き角を θ にしたときの，斜面から物体に働く垂直抗力の大きさと，作用点を求めよう。物体の斜面の下側の稜線を A とする。

(3)物体に働く力のつりあいより，垂直抗力の大きさと求めよ。

(4)A のまわりの重力のモーメントを求めよ。また静止摩擦力のモーメントを求めよ。ただし，反時計回りのモーメントを正とする。

(5)物体の底面に働く垂直抗力の作用点の A から斜面に沿った距離を x とする。物体に働く力のモーメントの和が 0 であることより，x を求めよ。

傾き角を増していくと，傾き角 θ_2 のとき物体は A を支点として回転を始めた。

(6)(5)で求めた垂直抗力の作用点は，物体の底面内になければならない。このことより回転を始めるときの傾き角 θ_2 を求めよ。

(解説)垂直抗力は，斜面と接する底面全体に働くが，合成して一つの力としたときの作用点を求める。

　また，この問題の結論からわかるように斜面を傾けたとき剛体が転がる条件は，重力の作用線が物体の斜面下側の稜線よりさらに下側を通過するときである。

　(4)の重力のモーメントの求め方は，ほかにもいろいろ考えられる。いろいろ試してみよう。

(1)静止摩擦の大きさをfとする。斜面に平行な方向のつりあいより

$$mg\sin\theta - f = 0 \qquad \therefore \qquad f = mg\sin\theta \qquad \cdots(答)$$

(2)斜面からの垂直抗力の大きさを N として，斜面に垂直方向のつりあいより $N = mg\cos\theta_1$ である。滑り出す直前，静止摩擦が最大値μNとなる。ゆえに

$$f = \mu N$$

$$mg\sin\theta_1 = \mu mg\cos\theta_1 \qquad \therefore \qquad \tan\theta_1 = \mu \qquad \cdots(答)$$

(3)(2)と同様に，斜面に垂直方向のつりあいより

$N = mg\cos\theta$　　$\cdots$(答)

(4)重力は直方体の重心 G に働く。図 1 のように重力の作用線が A からおろした垂線と交わる点を B とする。AB 間の距離は$\dfrac{1}{2}(b\cos\theta - a\sin\theta)$であるので、重力のモーメントは，反時計回りを正として

$$-\frac{mg}{2}(b\cos\theta - a\sin\theta) \qquad \cdots(答)$$

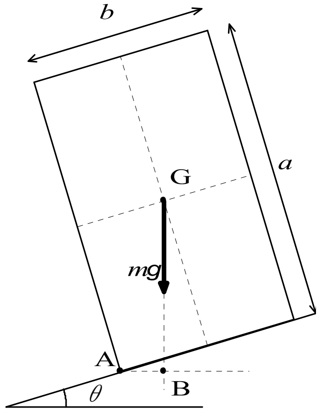

図 1

(別解)図 2 のように，重心で重力を斜面に平行な方向(大きさ$mg\cos\theta$)と，斜面に垂直な方向(大きさ$mg\sin\theta$)の成分に分解する。重心にこの 2 力が別々に働いていると考えて，モーメントを求める。それぞれの力を作用線に A からおろした垂線と交わる位置(C と D)に移動する。

$\mathrm{AC} = \dfrac{a}{2}$，$\mathrm{AD} = \dfrac{b}{2}$であるので A のまわりのモーメントは

$$mg\sin\theta \times \frac{a}{2} - mg\cos\theta \times \frac{b}{2} = -\frac{mg}{2}(b\cos\theta - a\sin\theta)$$

(5)A のまわりの垂直抗力のモーメントは

$$Nx = mg\cos\theta \cdot x$$

静止摩擦のモーメントは 0 である。ゆえに

$$mg\cos\theta \cdot x - \frac{mg}{2}(b\cos\theta - a\sin\theta) = 0$$

$$\therefore \qquad x = \frac{1}{2}(b - a\tan\theta) \qquad \cdots(答)$$

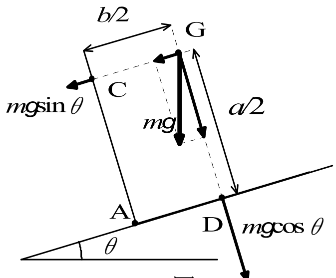

図 2

(参考)垂直抗力の作用点は，以下のようにしても求まる。

　直方体に働く力のモーメントの和が 0 であるということは，直方体に働く力の作用線が 1 点で交わるということと同じである。図 3 のように重力と静止摩擦力は必ず E 点で交わるので，垂直抗力の作用点も E でなければならない。ゆえに AE 間の距離xは

$$x = \frac{b}{2} - \frac{a}{2}\tan\theta$$

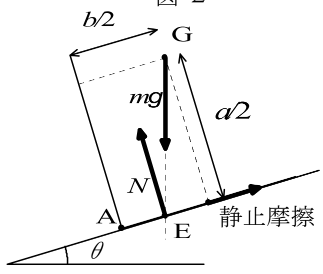

図 3

(6)垂直抗力は必ず，直方体の底面内に働くので $x \geqq 0$ である必要がある。ゆえに

$$x = \frac{1}{2}\left(b - a\tan\theta\right) \geqq 0$$

$$\therefore \quad \tan\theta \leqq \frac{b}{a}$$

ゆえに，回転を始める角 θ_2 は　$\tan\theta_2 = \dfrac{b}{a}$　…(答)

これは，重力の作用線が A を通過する状態である。