等しい質量 m をもった二つの物体 A, B を, 自然の長さ l_0, ばね定数 k の質量が無視できる丈夫なばねで連結し, 図１のように B を下にして静かに水平面上に置いた。重力加速度を g として, 以下の問題に答えよ。

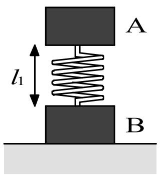

図1

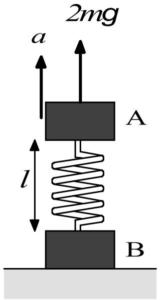

図2

Ⅰ　物体 A, B とばねは, 図１のようなつりあい状態にある。

問１　このときのばねの長さ l_1 を求めよ。

問２　ばねに蓄えられている弾性力の位置エネルギーはいくらか。

問３　B に働く垂直抗力はいくらか。

Ⅱ　つぎに, 鉛直上向きの一定の力 $2mg$ を働かせて物体 A を引っぱりあげると, A は初速度 0 で運動を始める。

問４　図２は, A が加速度 a で運動していて B はまだ静止の状態にある状況を示したものである。このときのばねの長さを l として, A に対するニュートンの運動方程式をかけ。

問５　このとき, B に働いている垂直抗力はいくらか。求め方も示せ。

Ⅲ　力を加えつづけると, やがて B が動き始める。

問６　B が動き出す瞬間のばねの長さ l_2 はいくらか。

問７　A に $2mg$ の力を加えはじめてから B が動き出す瞬間までに, この力が A にする仕事 W はいくらか。

問８　A に力を加えはじめてから B が動き出す瞬間までの, 重力による A の位置エネルギーの増加量 ΔV_A を求めよ。

問９　A に力を加えはじめてから B が動き出す瞬間までの, ばねに蓄えられた弾性力の位置エネルギーの増加量 ΔV はいくらか。

問10　B が動き出す瞬間の A の速さを v_0 とするとき, 文字 W, ΔV_A, ΔV 等を使って, 力学的エネルギーの変化と A に加えた力がした仕事の間になりたつ関係式を書け。

（解説）前半は力の図を丁寧に書き、つりあい、運動方程式を基本に忠実に解くこと。

問 4 で、ばねは自然長より長いか短いかわからないが、はじめの状態から考えて、自然長より短い状態は確実に存在するので、短いと仮定して解く方がよいであろう。なお自然長より長いと仮定しても式は同じである。

問 7 以降で、仕事は、力×距離　で基本に忠実に求める。また、

　力学的エネルギーの変化＝保存力（重力，弾性力）以外の力のした仕事

である。

I. 問 1.物体 A,B に働く力は図１のようになる。物体 A に働く力のつりあいを考える。ばねは、自然長よりl_0-l_1だけ縮んでいる。物体 A に働く弾性力は、上向きに$k(l_0-l_1)$であるので

$$k(l_0-l_1)-mg=0 \qquad \therefore\quad l_1=l_0-\frac{mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

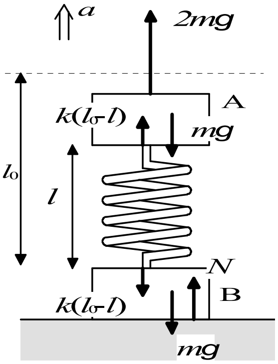

図 2

問 2.ばねの縮みは問１の結果より、

$$l_0-l_1=\frac{mg}{k}$$

ゆえに、弾性力により位置エネルギーは

$$\frac{1}{2}k(l_0-l_1)^2=\frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k}\right)^2=\frac{m^2g^2}{2k} \qquad \cdots(\text{答})$$

問 3. 物体 B に床から働く垂直抗力の大きさを N とする。物体 B に働く弾性力は、下向きに $k(l_0-l_1)$であるので、物体 B に働く力のつりあいより

$$N-mg-k(l_0-l_1)=0$$

問１の結果も用いて、

$$N=mg-k(l_0-l_1)=2mg \qquad \cdots(\text{答})$$

Ⅱ. 問 4. ばねは自然長より縮んでいると仮定すると物体 A,B に働く力は図2のようになる。ばねの縮みはl_0-lで物体 A に働く弾性力は上向きである。物体 A の運動方程式は

$$ma=2mg+k(l_0-l)-mg=mg+k(l_0-l) \qquad \cdots(\text{答})$$

（自然長よりものびていると仮定しても同じ式である。）

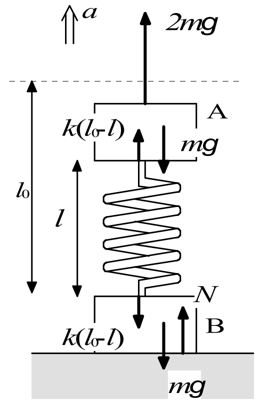

図 2

問 5. 物体 B は静止しているの。物体 B に働く力のつりあいより

$$N-mg-k(l_0-l)=0 \qquad \therefore\quad N=mg+k(l_0-l) \qquad \cdots ①\quad \cdots(\text{答})$$

Ⅲ. 問 6. B が動き出す瞬間、$N=0$ である。①式より

$$0=mg+k(l_0-l_2) \qquad \therefore\quad l_2=l_0+\frac{mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

問 7. この間、物体 A が上昇した距離 Δl は、

$$\Delta l=l_2-l_1=\frac{2mg}{k}$$

ゆえに、この力のした仕事 W は

$$W=2mg\times\Delta l=\frac{4m^2g^2}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

問 8.　$$\Delta V_A=mg\times\Delta l=\frac{2m^2g^2}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

問 9. ばねは自然長より、$l_0 - l_1 = \dfrac{mg}{k}$　縮んだ状態から、$l_2 - l_0 = \dfrac{mg}{k}$　だけ伸びた状態になった。弾性力による位置エネルギーの変化 $\varDelta V$ は、

$$\varDelta V = \frac{1}{2}(l_2 - l_0)^2 - \frac{1}{2}(l_0 - l_1)^2 = 0 \qquad \cdots(答)$$

問 10.　　力学的エネルギーの変化＝保存力以外の力のした仕事

であるので、

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \varDelta V_A + \varDelta V = W \qquad \cdots(答)$$