「折戸の物理」今週の１問　http://orito-buturi.com/　　　　NO.4(2009.6.1)

図で，E は起電力 E〔V〕の電池，R_1，R_2 はそれぞれ R_1〔Ω〕，R_2〔Ω〕の抵抗，L はインダクタンス L〔H〕のコイル，C は電気容量 C〔F〕のコンデンサー，S_1，S_2，S_3 はスイッチである。以下の設問に答えよ。ただし，電池およびコイルの内部抵抗は無視できる。また，電流は図の矢印の方向を正，ab 間の電圧は a 側が高電位の時を正とする。

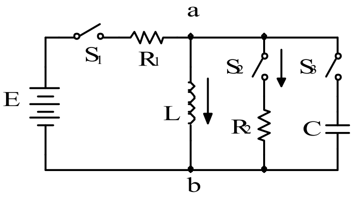


図1

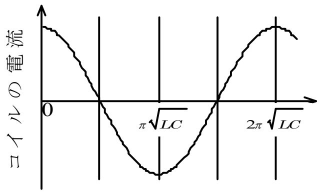


図2

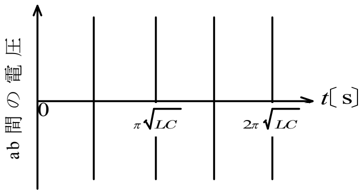


図3

Ⅰ　最初すべてのスイッチは開いており，またコンデンサーは帯電していない。S_1 を閉じて十分に時間が経過するとコイル L に流れる電流が一定となった。コイル L に流れる電流，および蓄えられるエネルギーはいくらか。

Ⅱ　Ⅰの状態でスイッチ S_2 を閉じた。

(1)スイッチ S_2 に流れる電流はいくらか。

(2)その後，スイッチ S_1 を開いた。その直後の，スイッチ S_2 に流れる電流，ab 間の電圧，および抵抗 R_2 で消費される電力はいくらか。

(3)その後コイル L を流れる電流は減少する。減少の速さは R_2 の値の大小によってどう変わるか。理由とともに記せ。

Ⅲ　Ⅱでは，Ⅰの状態でスイッチ S_2 を閉じた場合の現象を考えた。ここでは，Ⅱと異なり，Ⅰの状態でスイッチ S_2 のかわりにスイッチ S_3 を閉じた。

(1)その後，スイッチ S_1 を開くとコイル L に流れる電流は図２のように正弦波的に振動した。周期は $2\pi\sqrt{LC}$〔s〕であった。図３の座標を写し，その上に ab 間の電圧の時間変化の様子を描け。ただしスイッチ S_1 を開いてからの時間を t〔s〕とする。

(2)コイル L の電流が 0〔A〕となった瞬間にスイッチ S_3 を開いた。コンデンサーC に蓄えられる電荷はいくらか。

(解説)コイルに流れる電流は自己誘導により，急に不連続に変化できない。

また，直流回路の場合，十分時間が経過すると，電流値は一定となり(0 も含んで)，コイルの誘導起電力は 0 となる。つまり，コイルの両端の電位差は 0 で，ただの導線と扱ってよい。

コイル(自己インダクタンスL)とコンデンサー(容量C)の電気振動では，流れる電流I，コンデンサーの電圧Vとしてエネルギー保存則，

$$\frac{1}{2}LI^2+\frac{1}{2}CV^2=一定$$

が成り立つ。

Ⅰ．電流が一定で変化しなくなるのでコイルの両端の電圧は 0 である。流れる電流をI_1として

$$I_1=\frac{E}{R_1}〔\mathrm{A}〕$$

コイルに蓄えられるエネルギーは

$$\frac{1}{2}LI_1^2=\frac{L}{2}\left(\frac{E}{R_1}\right)^2〔\mathrm{J}〕$$

Ⅱ．(1)スイッチS_2を閉じた直後，コイルに流れる電流は急に変化できないのでI_1のままである。R_2に流れる電流をI_2とすると，抵抗R_1には，I_1+I_2の電流が流れる。キルヒホッフの法則より

$$E=(I_1+I_2)R_1+I_2R_2=\frac{E}{R_1}\cdot R_1+I_2(R_1+R_2) \qquad \therefore \quad I_2=0〔\mathrm{A}〕$$

また，このとき ab 間の電圧は 0 である。つまり，コイルの誘導起電力も 0 なので，コイルに流れる電流I_1はその後も変化しない。ゆえにI_2も 0 のままである。

0〔A〕 ･･･(答)

（十分時間が経過後を考えても，コイルに一定の電流が流れ，コイルの起電力は 0 となる。そのため，ab 間の電圧が 0 となるので，抵抗R_2に電流は流れない。またコイルに流れる電流はI_1である。）

(2)スイッチS_1を開いた直後もコイルに流れる電流は急に変化せず，$I_1=\frac{E}{R_1}$である。S_1が開かれ，コイルと抵抗R_2だけで回路が作られるので，S_2には b→a 向きに大きさI_1の電流が流れる。ゆえに $-I_1=-\frac{E}{R_1}〔\mathrm{A}〕$ ⋯(答)

ab 間の電圧 V_{ab}は，R_2の両端の電圧である。電流の向きを考えると，a の方が電位が低い。

$$V_{ab}=-I_1R_2=-\frac{R_2}{R_1}E〔\mathrm{A}〕 \qquad \cdots(答)$$

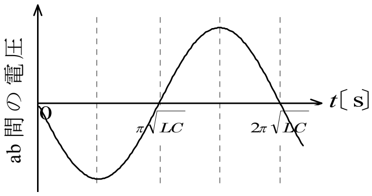
この瞬間の，抵抗R_2の消費電力 P_2は

$$P_2=I_1^2R_2=\frac{R_2}{R_1^2}E^2〔\mathrm{W}〕 \qquad \cdots(答)$$

(3)抵抗値 R_2が大きいと速くなる ⋯(答)

(理由)コイルのエネルギーが，抵抗 R_2 で消費されジュール熱となり電流が減少する。抵抗R_2での消費電力は，抵抗値R_2に比例するので，R_2が大きいとエネルギーの減少は速くなる。

Ⅲ．(1) スイッチ S_1を開く直前，コイルに流れる電流は$I_1 = \dfrac{E}{R_1}$ である。またコイルの誘導起電力は 0〔V〕なのでコンデンサーには電荷は無い。スイッチ S_1を開いた直後も同様である。t ＝ 0〔s〕以後，コイルを流れる電流がコンデンサーに流れ込み，まず b 側が正に帯電する。そして，コンデンサーの電圧が最大になるのは，コイルの電流が 0〔A〕になるときである。これら電気振動の性質を考えてグラフにすると右図となる。



(注)なお，正確な式の求め方の一例を下記に示す。

任意の時刻にコイルの電流がI，ab 間の電圧がVになったとすると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}LI_1^2 = \frac{1}{2}LI^2 + \frac{1}{2}CV^2 \quad \cdots①$$

また，問題中の図2より，時刻 $t = 0$〔s〕の時の電流が I_1であることも考慮してIを式で表すと

$$I = I_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} \quad \cdots②$$

①，②よりVを求めると

$$V^2 = \frac{L}{C}(I_1^2 - I^2) = \frac{I_1^2 L}{C}\left(1 - \cos^2\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) = \frac{I_1^2 L}{C}\sin^2\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$$V = \pm I_1\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$$

$t = 0$〔s〕以後，まずコンデンサーの b 側が正に帯電することを考えて，

$$V = -I_1\sqrt{\frac{L}{C}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} \text{〔V〕}$$

(2)コイルに流れる電流が 0〔A〕となったとき，コンデンサーに蓄えられた電荷を Q_0とすると，エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}LI_1^2 = \frac{Q_0^2}{2C} \qquad \therefore \quad Q_0 = I_1\sqrt{LC} = \frac{E}{R_1}\sqrt{LC} \text{〔C〕} \qquad \cdots(\text{答})$$