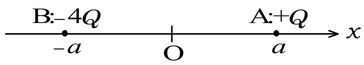
図のように原点を O とする x 軸上で，$x = a$ の点に電気量 Q の点電荷 A，$x = -a$ の点に電気量$-4Q$ の点電荷 B が固定されている。クーロンの法則の比例定数を k として以下の問に答えよ。



(1)原点 O での電場の大きさと向きを求めよ。

(2) 次の①～③の位置での電場の大きさと向きを求めなよ。

① $x = 4a$　　② $x = 2a$　　③ $x = -2a$

(3)電場が 0 になる位置を求めよ。

(4)$x = 5a$ の点の電位を求めよ。ただし電位の基準を無限の遠方とする。

(5)x 軸上で，電位が 0 になる位置をすべて求めよ。

(6)$x > a$ の範囲で，横軸に x，縦軸に電位 V をとったグラフの概略を描け。

x 軸正方向に，原点から十分に離れた点に，x 軸上を自由に動ける電気量 q ($q > 0$)，質量 m の電荷を静かに置くと，電荷は原点方向に動き出した。

(7)電荷が $x = 5a$ の点を通過するときの速さを求めよ。

(8)電荷が最も原点に接近する位置の位置座標を求めよ。

(9)この間，電荷の速さが最大になる位置の位置座標と，速さの最大値を求めよ。

(解説)電場はベクトル，電位はスカラーである。したがって，電場を考えるときは方向を考える必要がある。電場の正負は向きを表す。電位を考えるときは向きを考える必要がない。正負はそのまま計算すること。

電位 V と電場 E の関係であるが，電位の単位長さあたりの変化量が電場である。従って電位の勾配(傾き)が電場であるといえる。x 軸上で電位 V と電場 E の関係は

$$E=-\frac{dV}{dx}$$

である。

電位 V の位置に置かれた電気量 q の電荷の持つ静電エネルギー U は

$$U=qV$$

である。

横軸を位置にとって縦軸に位置エネルギーをとったグラフをポテンシャル曲線という。位置エネルギー U の勾配(傾き)が力 f である。つまり

$$f=-\frac{dU}{dx}$$

である。これは物体の運動がポテンシャル曲線を断面に持つような坂道を転がる運動のように考えられるということである。

(1)原点では，電荷 A，B による電場は共に x 軸負方向である。電場の大きさは

$$\left|-\frac{kQ}{a^2}-\frac{4kQ}{a^2}\right|=\frac{5kQ}{a^2}$$　　向きは　x 軸負方向　…(答)

(2)電荷 A，B による電場の方向に注意して考える。

①電荷 A による電場は x 軸正方向，電荷 B による電場は x 軸負方向であるので

$$\frac{kQ}{(4a-a)^2}-\frac{4kQ}{(4a+a)^2}=-\frac{11kQ}{225a^2}$$

ゆえに　　大きさ　$\frac{11kQ}{225a^2}$　　向き　x 軸負方向

②①と同様に

$$\frac{kQ}{(2a-a)^2}-\frac{4kQ}{(2a+a)^2}=\frac{5kQ}{9a^2}$$

ゆえに　　大きさ　$\frac{5kQ}{9a^2}$　　向き　x 軸正方向

③電荷 A による電場は x 軸負方向，電荷 B による電場は x 軸正方向であるので

$$-\frac{kQ}{(-2a-a)^2}+\frac{4kQ}{(-2a+a)^2}=\frac{35kQ}{9a^2}$$

ゆえに　　大きさ　$\frac{35kQ}{9a^2}$　　向き　x 軸正方向

(3)電場が 0 であるためには，電荷 A，B による電場が逆向きで同じ大きさの点である。まず，電場が同じ大きさの点の位置座標を x として求めると

$$\frac{kQ}{(x-a)^2}=\frac{4kQ}{(x+a)^2}$$

$$3x^2-9ax+3a^2=0 \qquad \therefore \quad x=\frac{a}{3},3a$$

向きを考えると，$x=\dfrac{a}{3}$ の点では電荷 A，B による電場は共に x 軸負方向であるので，電場は 0 にならない。

$x=3a$ の点では，電荷 A による電場は x 軸正方向，電荷 B による電場は x 軸負方向で逆向きであるので，電場の重ね合わせにより 0 となる。ゆえに

$x=3a$ …(答)

(4)$x=5a$ の位置での電位 V_1 は $\quad V_1=\dfrac{kQ}{(5a-a)}-\dfrac{4kQ}{(5a+a)}=-\dfrac{5kQ}{12a}$ …(答)

(5)軸上の任意の x での電位 V は

$$V=\frac{kQ}{|x-a|}-\frac{4kQ}{|x+a|}$$

これを，位置により場合分けして 0 になる点を探す。

$a \leqq x$

$$V=\frac{kQ}{x-a}-\frac{4kQ}{x+a}=0 \qquad \therefore \qquad x=\frac{5}{3}a$$

$a \leqq x<a$

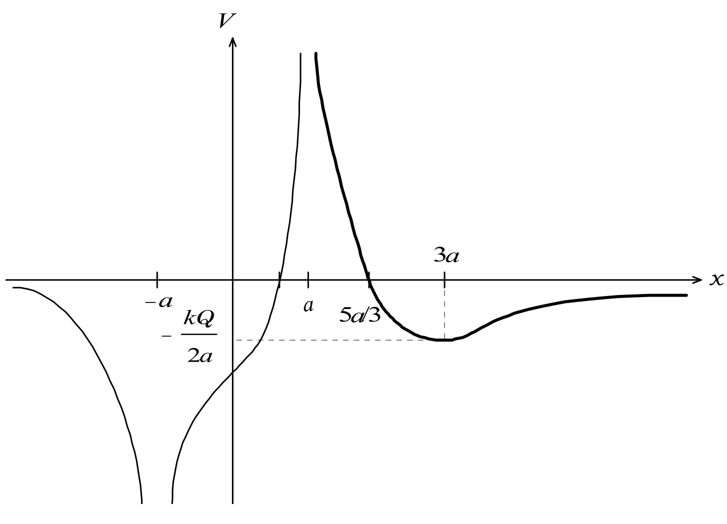
$$V=\frac{kQ}{a-x}-\frac{4kQ}{x+a}=0 \qquad \therefore \qquad x=\frac{3}{5}a$$

$x<-a$

$$V=\frac{kQ}{a-x}-\frac{4kQ}{a-x}=0 \qquad \therefore \qquad x=\frac{5}{3}a$$ だが，範囲外なので不適

ゆえに電位が 0 になるのは $\quad x=\dfrac{3}{5}a,\dfrac{5}{3}a$ …(答)

(6)(5)までの結果より考える。無限遠方で電位は 0 である。(2)，(3)より $x>3a$ では電位は x 軸負方向であるので，x が大きいほど電位は大きい。$a<x<3a$ では電位は正で，x が大きいほど電位は小さい。また(5)より $x=\dfrac{5}{3}a$ で電位は 0 である。これらをまとめると，下図になる。(図には $x<a$ の領域のグラフも描いている。)



(7)十分に遠方で電荷の運動エネルギー，静電エネルギーが 0 である。$x=5a$ の点での電荷の速さを υ_1 として，エネルギー保存則より，(4)の結果も利用して

$$0=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2+qV_1=\frac{1}{2}m\upsilon_1^2-\frac{5kQq}{12a} \qquad \therefore \qquad \upsilon_1=\sqrt{\frac{5kQq}{6ma}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)電荷の速度が 0 になるのは，静電エネルギーが 0 になる点であるので，(5)より

$$x=\frac{5}{3}a \qquad \cdots(\text{答})$$

(9)十分遠方から電荷は加速され，電場が 0 の点(x =3a)で加速が終わるので，速度が最大になる。x =3a での電位を V_2 とすると

$$V_2=\frac{kQ}{(3a-a)}-\frac{4kQ}{(3a+a)}=-\frac{kQ}{2a}$$

x =3a での速さを υ_2 とすると

$$0=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2+qV_2=\frac{1}{2}m\upsilon_2^2-\frac{kQq}{2a} \qquad \therefore \qquad \upsilon_1=\sqrt{\frac{kQq}{ma}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(参考)静電エネルギー(静電気力による位置エネルギー)は，qV であり，$q>0$ より位置エネルギーは(6)のグラフと同形になる。このグラフを見ると電荷の運動が想像しやすい。十分に遠方から坂を転がり，$x=3a$ が底になり，$x=\frac{5}{3}a$ まで到達する。