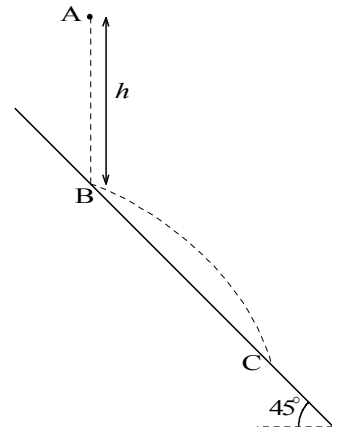


右図のように、傾き角  $45^\circ$  のなめらかな斜面がある。点 A より質量  $m$  の質点を静かに落とすと、鉛直に高さ  $h$  だけ落下し斜面上の点 B で衝突してはね上がり、次に点 C で斜面と衝突した。質点と斜面とのはねかえり係数を  $\frac{1}{2}$ 、重力加速度の大きさを  $g$  として以下の問に答えよ。



- (1) 点 B で質点が斜面と衝突する直前の速さを求めよ。
- (2) 点 B で質点が斜面と衝突した直後、速度の斜面に平行な成分と垂直な成分の大きさを求めよ。
- (3) 点 B で質点が斜面と衝突した際、質点が斜面から受けた力積の大きさを求めよ。
- (4) 点 C で再び斜面と衝突する直前の、質点の速度の水平方向の成分を求めよ。
- (5) 点 A から点 C で衝突するまでの時間を求めよ。また点 B と点 C の距離を求めよ。
- (6) 点 C で衝突直後の質点の速度の大きさを求めよ。

(解説)なめらかな面との衝突では、速度の面に平行な方向の成分は変化せず、はねかえり係数を  $e$  とすると面に垂直な方向の成分のみが  $e$  倍になる。

この問題では斜面との衝突を考える際は、速度を斜面に平行、垂直成分に分解して考えるが、放物運動を考えるときは速度を水平、鉛直に分けて考える必要がある。つまり、速度を分解する方向を、自由自在に変換することを学んで欲しい。

(1)点 B に衝突直前の速さを  $v_1$  として

$$v_1^2 = 2gh \quad \therefore \quad v_1 = \sqrt{2gh} \quad \dots(\text{答})$$

(2)図 1 のように衝突直前の速度を、斜面に平行成分  $V_{1x}$  と垂直成分  $V_{1y}$  に分ける。

$$V_{1x} = v_1 \sin 45^\circ = \sqrt{gh}$$

$$V_{1y} = v_1 \cos 45^\circ = \sqrt{gh}$$

垂直成分だけが逆向きに  $\frac{1}{2}$  倍になる。衝突

直後の速度の斜面に平行成分、垂直成分の大きさをそれぞれ  $V_{2x}$ 、 $V_{2y}$  として

$$V_{2x} = V_{1x} = \sqrt{gh}, \quad V_{2y} = \frac{V_{1y}}{2} = \frac{\sqrt{gh}}{2} \quad \dots(\text{答})$$

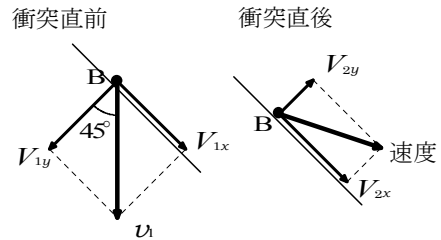
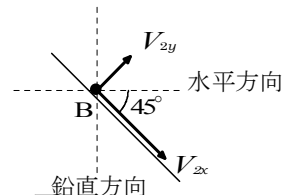


図 1

(3)運動量も速度と同様に、斜面に垂直な成分だけが変化する。力積は運動量の変化なので

$$mV_{2y} + mV_{1y} = \frac{m\sqrt{gh}}{2} + m\sqrt{gh} = \frac{3m\sqrt{gh}}{2} \quad \dots(\text{答})$$

(4)質点は放物運動をするが、放物運動を考えるときは水平と鉛直に分けて考える。点 B で衝突直後の速度を水平成分  $v_{2x}$  と、鉛直成分  $v_{2y}$  (下向きを正とする)にわけろ。(2)で求めた  $V_{2x}$ 、 $V_{2y}$  から  $v_{2x}$ 、 $v_{2y}$  を求める。図 2 を参考にして欲しい。



$$v_{2x} = V_{2x} \cos 45^\circ + V_{2y} \sin 45^\circ = \sqrt{gh} \times \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{gh}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{gh}{2}} \quad \text{図 2}$$

$$v_{2y} = V_{2x} \sin 45^\circ - V_{2y} \cos 45^\circ = \sqrt{gh} \times \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{gh}}{2} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{gh}{2}}$$

速度の水平成分は変化しないので、C で衝突する直前も  $\frac{3}{2} \sqrt{\frac{gh}{2}} \quad \dots(\text{答})$

(5)斜面の傾きが  $45^\circ$  なので、放物運動の水平距離と鉛直方向の落下距離が等しくなると再び斜面と衝突する。ゆえに、衝突までの時間を  $t$  として

$$v_{2x}t = v_{2y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{gh}{2}}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gh}{2}}t + \frac{1}{2}gt^2 \quad \therefore \quad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad \dots(\text{答})$$

この間の水平距離  $x$  は

$$x = v_{2x}t = \frac{3}{2}h$$

ゆえに AC 間の距離は

$$AC = \frac{x}{\cos 45^\circ} = \frac{3\sqrt{2}}{2}h \quad \dots(\text{答})$$

(6)C で衝突直前の水平成分, 鉛直成分をそれぞれ  $v_{3x}$ ,  $v_{3y}$  とすると

$$v_{3x} = v_{2x} = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

$$v_{3y} = v_{2y} + gt = \frac{5}{2}\sqrt{\frac{gh}{2}}$$

図 3 を参考に, 斜面に平行成分  $V_{3x}$ , 垂直成分  $V_{3y}$  の大きさを求める。

$$V_{3x} = v_{3x} \cos 45^\circ + v_{3y} \sin 45^\circ = 2\sqrt{gh}$$

$$V_{3y} = -v_{3x} \sin 45^\circ + v_{3y} \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{gh}}{2}$$

C で衝突直後の斜面に平行成分  $V_{4x}$ , 垂直成分  $V_{4y}$  の大きさを求めると

$$V_{4x} = V_{3x} = 2\sqrt{gh}$$

$$V_{4y} = \frac{V_{3y}}{2} = \frac{\sqrt{gh}}{4}$$

これより, 衝突後の速度の大きさ  $v_4$  は

$$v_4 = \sqrt{V_{4x}^2 + V_{4y}^2} = \frac{\sqrt{65gh}}{4} \quad \dots(\text{答})$$

