以下の文中の［ ア ］～［ ク ］の空欄に適当な数式を答よ。ただし，重力加速度の大きさを g とする。

図１のようになめらかな水平面上に，高さ h，傾き角 θ の斜面を持つ質量 M の三角台が置かれている。三角台の斜面の上端に質量 m の小物体を置き静かに手をはなすと，小物体は斜面に沿って滑りはじめると同時に，三角台も動き出した。小物体はやがて水平面に到達した。小物体と斜面の間には摩擦はないものとする。

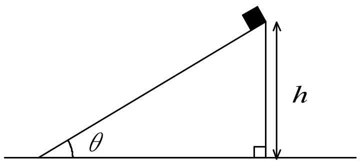


図 1

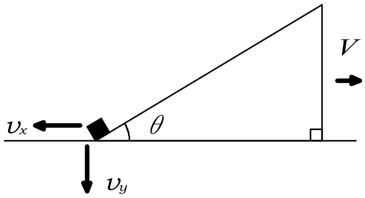


図 2

小物体が，水平面に到達する直前について考える。図２のように，三角台の右向きの速さを V，小物体の水平左向きの速さを v_x，鉛直下向きの速さを v_y とする。V と v_x の関係を，M, m も用いて式にすると

［ ア ］ …①

小物体が水平面に達するまでの時間を t とし、この間の小物体の加速度は一定であるとして，高さ h を，v_y, t で表すと

$h =$［ イ ］ …②

三角台と小物体の全体の力学的エネルギーは保存する。h を用いて式にすると

［ ウ ］ …③

小物体の三角台に対する相対速度は，鉛直下向き成分が v_y，水平左向き成分が［ エ ］である。三角台上から見ると小物体は斜面をすべり降りるので

$v_y =$【エ】×［ オ ］ …④

である。

①～④の式より，V を M, m, g, θ, t で表すと

$V =$［ カ ］ …⑤

となる。

小物体と三角台の間の垂直抗力の大きさを N とし，N は一定であるとすると，三角台の運動量 MV は N, θ, t で

$MV =$［ キ ］ …⑥

⑤，⑥式より N を M, m, g, θ, で表すと

$N =$［ ク ］

(解説)なめらかな水平面上に置かれた三角台と小物体の運動の問題はよくある(2008 演習 NO.4 など)。通常は，運動方程式から解くのであるが，こんなアプローチもある。

三角台と小物体に働く力のうち，水平方向に成分を持つのは両者間の垂直抗力のみである。これは三角台と小物体からなる体系での内力なので，この体系の水平方向の運動量は保存する。これにより V と v_x との関係がわかる。後は，エネルギー保存則，三角台上から見た小物体の運動の方向などを考えて式を作る。

三角台の水平方向の運動量変化は，三角台に働く水平方向の力積である。

(解答)ア．水平方向の運動量の和が保存する。はじめ0である。垂直抗力の作用する無機を考えると，三角台は左に，小物体は右に動くことになるので

$$0 = MV - mv_x \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

イ．小物体の加速度の鉛直下向きの大きさを a_y とすると

$$v_y = a_y t \quad , \quad h = \frac{1}{2}a_y t^2$$

この2式より

$$h = \frac{1}{2}v_y t \quad \cdots② \quad \cdots(答)$$

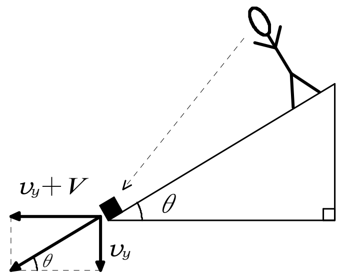
ウ．三角台と小物体の力学的エネルギーの和が保存するので

$$mgh = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

エ．三角台から見た水平方向の相対速度 u_x は左向きを正として

$$u_x = v_x - (-V) = v_x + V \quad \cdots(答)$$

オ．問題にあるように，水平方向の相対速度 u_y は v_y である。右図のように三角台上から見ると小物体の速度(相対速度)は斜面に沿っているので



$$\tan\theta = \frac{u_y}{u_x} = \frac{v_y}{v_x + V}$$

$$\therefore \quad v_y = (v_x + V)\tan\theta \quad \cdots④$$

tanθ …(答)

カ．①式より $v_x = \dfrac{MV}{m}$

これを④式に代入して

$$v_y = \left(\frac{M+m}{m}\right)V\tan\theta$$

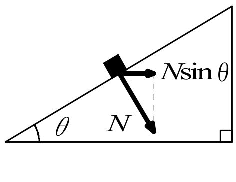
これら v_x, v_y と②式の h を③式に代入する。

$$\frac{mg}{2}\left(\frac{M+m}{m}\right)V\tan\theta\cdot t = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}m\left[\left(\frac{M}{m}V\right)^2 + \left\{\left(\frac{M+m}{m}\right)V\tan\theta\right\}^2\right]$$

これを解いて

$$V = \frac{mg\sin\theta\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}t \quad \cdots⑤ \quad \cdots(答)$$

キ．三角台に働く力のうち，水平成分を持つのは小物体からの垂直抗力だけである。図のように，垂直抗力の水平成分は $N\sin\theta$ である。運動量の変化が力積なので



$$MV = N\sin\theta\cdot t \quad \cdots⑥ \quad \cdots(答)$$

ク．⑤，⑥式より

$$N = \frac{mMg\cos\theta}{M + m\sin^2\theta}t \quad \cdots(答)$$