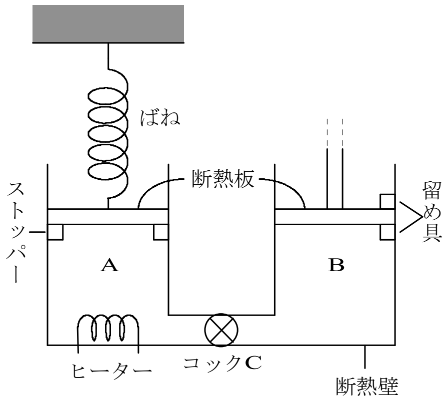
図のように，断熱壁で囲まれた同一形状のシリンダーA，Bが，コックCのついた体積の無視できる細い管でつながれている。最初，コックCは閉じていて，シリンダーAには，圧力P_0，体積V_0，物質量(モル数)nの単原子分子の理想気体が質量mの断熱板で閉じこめられている。断熱板はすべり落ちないように，下からストッパーで支えられており，天井から質量の無視できるばね定数kのばねが取りつけられている。ばねの長さは自然長に等しい。また，シリンダーA内には，ヒーターがあり，スイッチを入れると，気体を加熱することができる。シリンダーBは真空になっていて，内部の容積がV_0になるような高さに断熱板があり，留め具により固定されている。断熱板の断面積をS，重力加速度の大きさをg，気体定数をRとして，以下の設問に答えよ。ただし，断熱板はシリンダー内をなめらかに動くものとする。シリンダー外部の圧力による影響は無視してよい。



(1)コックCをゆっくり開く。十分に時間が経過して，気体がシリンダーA，Bの内部に一様に充満したときの気体の状態をZ_1とし，そのときの温度T_1と圧力P_1を求めよ。ただし，シリンダーA内の断熱板はストッパーから離れないものとする。

(2)状態Z_1において，ヒーターのスイッチを入れて気体をゆっくり加熱すると，しばらくして，シリンダーAの断熱板が動き始めた。その瞬間に，ヒーターのスイッチを切った。スイッチを切ったあとの気体の状態をZ_2とし，そのときの気体の圧力P_2と温度T_2を求めよ。

(3)状態Z_2において，ヒーターのスイッチを入れて気体を徐々に加熱すると，シリンダーAの断熱板がゆっくりと上方に動いた。気体の体積がΔVだけ増えたとき，ヒーターのスイッチを切った。スイッチを切ったあとの気体の状態をZ_3とし，状態Z_2から状態Z_3への変化に関して，以下の設問に答えよ。

(a)気体の圧力増加ΔPをΔVによって表せ。

(b)気体がした仕事W_gをP_2，ΔP，ΔVによって表せ。

(c)ヒーターが気体に与えた熱Q_hをP_2，V_0，ΔV，ΔPによって表せ。

(4)状態Z_2において，コックCを閉め，シリンダーBの断熱板の留め具を外し，その断熱板を機械的に速く上下振動させたあとに，もとの位置に戻し，ふたたび，留め具で固定した。この間に，気体がなされた仕事を$W_m(>0)$とする。その後，十分に時間が経過したときの状態をZ_4とする。状態Z_4の温度T_4をT_2，W_mによって表せ。

(5)状態Z_4において，コックCをゆっくりと開くと，シリンダーAの断熱板がゆっくりと上方に動き，状態Z_3と同じ状態になった。このとき，W_mとQ_hの関係を記せ。また，その関係が成りたつ理由を簡潔に述べよ。

(解説)真空に対して気体が膨張した場合，気体は仕事をしない。また，熱の出入りもない場合は，熱力学第一法則より内部エネルギーの変化もない。ゆえに温度は変化しない。このような膨張を真空膨張と呼ぶ。

真空膨張では温度は変化しない。

また，仕事の符号に注意すること。気体がした仕事を正にするのか，外部からされた仕事を正にするのか，自分なりに決めておくとよいだろう。

(1)コックを開く前のシリンダーA 内の温度 T_0 は，状態方程式より

$$P_0V_0 = nRT_0 \qquad \therefore \quad T_0 = \frac{P_0V_0}{nR}$$

コック C を開けると，A 内の気体が，真空である B に膨張する。真空膨張では温度は変化しないので，

$$T_1 = T_0 = \frac{P_0V_0}{nR} \qquad \cdots(\text{答})$$

体積が $2V_0$ になるので，状態方程式より圧力 P_1 は

$$P_1 \cdot 2V_0 = nRT_1 \qquad \therefore P_1 = \frac{nRT_1}{2V_0} = \frac{P_0}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)ピストンに働く A からの気体の圧力と，重力がつりあっている。ばねは自然長なので，バネからの力は働いていない。力のつりあいより

$$mg - P_2S = 0 \qquad \therefore \quad P_2 = \frac{mg}{S} \qquad \cdots① \quad \cdots(\text{答})$$

また，状態方程式より

$$P_2 \cdot 2V_0 = nRT_2 \qquad \therefore \quad T_2 = \frac{2P_2V_0}{nR} = \frac{2mgV_0}{nRS} \qquad \cdots(\text{答})$$

(3)(a)状態 Z_3 でのばねの縮みは $\dfrac{\varDelta V}{S}$ である。気体の圧力を P_3 として，ピストンに働く力のつりあいより

$$mg + k\frac{\varDelta V}{S} - P_3S = 0 \qquad \therefore \quad P_3 = \frac{mg}{S} + \frac{k\varDelta V}{S^2}$$

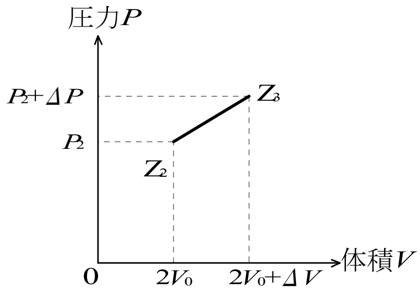
ゆえに圧力変化 $\varDelta P$ は

$$\varDelta P = P_3 - P_2 = \frac{k\varDelta V}{S^2} \qquad \cdots② \quad \cdots(\text{答})$$

(b)ばねからの力は伸びに比例するので，結局体積変化に比例することになる。この間の P–V 線図は右図となる。グラフの面積が仕事になるので

$$W_g = \frac{1}{2}\left(P_2 + P_2 + \varDelta P\right) \times \varDelta V = \frac{\left(2P_2 + \varDelta P\right)\varDelta V}{2}$$

$\cdots$(答)



(別解)気体のした仕事が，ピストンの位置エネルギーの増加と，ばねの弾性エネルギーの増加になるので

$$W_g = mg \times \frac{\varDelta V}{S} + \frac{1}{2}k\left(\frac{\varDelta V}{S}\right)^2$$

①，②式より

$$W_g = P_2\varDelta V + \frac{1}{2}\varDelta P\varDelta V$$

(c)状態 Z_3 での温度を T_3 とする。状態方程式より

$$P_3(2V_0+\varDelta V)=nRT_3 \qquad \therefore \qquad T_3=\frac{P_3(2V_0+\varDelta V)}{nR}=\frac{(P_2+\varDelta P)(2V_0+\varDelta V)}{nR}$$

この間の内部エネルギーの変化量 $\varDelta U_3$ は

$$\varDelta U_3=\frac{3}{2}nR(T_3-T_2)=\frac{3}{2}(P_2\varDelta V+2V_0\varDelta P+\varDelta P\varDelta V)$$

熱力学第一法則より，気体に与えた熱 Q_h は

$$Q_h=\varDelta U_3+W_g=\frac{5P_2\varDelta V+6V_0\varDelta P+4\varDelta P\varDelta V}{2} \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)気体がなされた仕事が全て内部エネルギーに変わる。状態 Z_4 の温度を T_4 とすると，A 内になる気体の物質量は $\frac{n}{2}$ モルであることも考慮して

$$W_m=\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2}R(T_4-T_2) \qquad \therefore \qquad T_4=T_2+\frac{4W_m}{3nR} \qquad \cdots(\text{答})$$

(5) $\quad W_m=Q_h \qquad \cdots(\text{答})$

(理由)最終的な状態が同じであるので，外部から与えたエネルギーは両過程で同じである。