図1のように，振動数f_0の音を発する音源が，O 点で静止している観測者に向かって，一定の速さ v でまっすぐに進んでいる。音源は，時刻 $t=0$ にA点を通過し，時刻 $t=\Delta t$ ($\Delta t>0$)にA'点を通過した。無風状態での音の速さを c として，風の状態が以下の〔A〕,〔B〕,〔C〕それぞれの場合に，観測者が聞く音の振動数を考えよう。以下の文中の[　]に適切な数式を書き入れよ。音源の速さ v，風速 w は音の速さ c に比べて十分に小さいものとする。

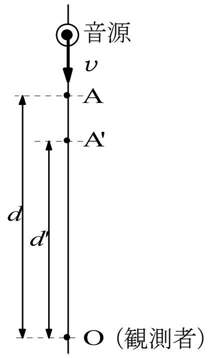

図 1

〔A〕まず，風のない状態($w=0$)について考えよう。A点で時刻 $t=0$ に発した音の波面は，時刻 $t=t_1$に O 点に達した。また，A'点で時刻 $t=\Delta t$に発した音の波面は，時刻 $t=t_1+\Delta t_1$に O 点に達した。時間 Δtの間に音源が発した音を時間Δt_1の間に観測者が聞くので，観測者が聞く音の振動数 f_1は，f_0, Δt, Δt_1を用いて，f_1=[1]と表される。AO 間の距離 d は $d=ct_1$，A'O 間の距離 d'は $d'=c(t_1+\Delta t_1-\Delta t)$で与えられる。したがって，$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_1}$は，$v$, c を用いて，$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_1}$=[2]と表される。これらのことから，観測者が聞く音の振動数 f_1は，v, c, f_0を用いて，f_1 =[3]と表される。

〔B〕図2のように，突然，風が $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の向きに吹き始める場合について考えよう。時刻 $t=0$ では風は吹いていなかった。A点で時刻 $t=0$ に発した音の波面が O 点に達する前のある時刻 $t=t_0$に，速さ wの風が，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ の向きにすべての場所でいっせいに吹き始めた。その後，この音の波面は，時刻 $t=t_2$ ($t_2>t_0$)に O 点に達した。また，風が吹き始める前の時刻 $t=\Delta t$ ($\Delta t<t_0$)に音源は A'点を通過し，A'点で発した音の波面は，時刻 $t=t_2+\Delta t_2$に O 点に達した。このとき，AO 間の距離 d は，t_0, t_2, w, c を用いて，d =[4]と表され，A'O 間の距離 d'は，t_0, t_2, Δt, Δt_2, w, c を用いて，d' =[5]と表される。したがって，$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_2}$は，$v$, w, c を用いて，$\dfrac{\Delta t}{\Delta t_2}$=[6]と表される。これらのことから，観測者が聞く音の振動数 f_2は，v, w, c, f_0を用いて，f_2 =[7]と表される。

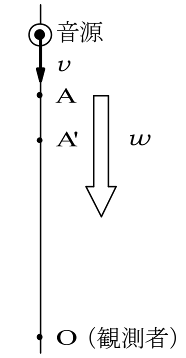

図 2

その後，音源が O 点を通過する前に，O 点の観測者が聞く音の振動数はf_2からf_2'に変化した。振動数 f_2'は，v, w, c, f_0を用いて，f_2' =[8]と表される。

〔C〕図3のように，速さ w の一様な風が常に真横に吹いている場合について考えよう。A点で時刻 $t = 0$ に発した音の波面は，時刻 $t = t_3$ に O 点に達した。そのときの波面を表す円の一部が図3に示されている。この円の中心をB点とする。AB間の距離 s は，t_3を含んだ式で，$s =$［ 9 ］と表される。また，BO 間の距離 s'は，t_3を含んだ式で，$s' =$［ 10 ］と表される。このとき，AO 間の距離 d は，t_3, w, c を用いて，$d =$［ 11 ］と表される。音源は，時刻 $t = \varDelta t$ に A'点を通過し，A'点で発した音の波面は，時刻 $t = t_3 + \varDelta t_3$ に O 点に達した。したがって，$\dfrac{\varDelta t}{\varDelta t_3}$ は，v, w, c を用いて表され，これらのことから，観測者が聞く音の振動数 f_3は，v, w, c, f_0を用いて，$f_3 =$［ 12 ］と表される。

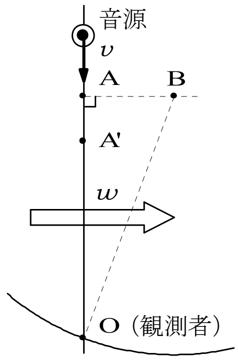

図 3

(解説)ドップラー効果を音波の到着時刻の差から捉える問題。音源が動く場合のドップラー効果は，教科書的には波長の変化から振動数を求めるが，このような求め方もある。

(授業問題のプリント NO.34，問題 172 を参考にして欲しい。)

つまり，音源が振動数 f_0 の音を時間 $\varDelta t_0$ だけ出したとする。この間，音波は１周期分(あるいは１波長分)を１個として，$f_0\varDelta t_0$ 個放出された。観測者が，この音を振動数 f で時間 $\varDelta t$ だけ聞いたとすると，音波の個数は同じなので

$$f_0\varDelta t_0 = f\varDelta t \qquad \therefore \quad f = \frac{f_0\varDelta t_0}{\varDelta t}$$

という考え方である。

この問題では，[A]で，この考え方を理解させ，同じ論法で[B]，[C]はさらに複雑な場合を考えるようになっている。[B]は波動ではなく，運動学の頭の体操である。[C]では，横風により，音波の発信元が横に移動していると考えよう。

[A]1. 音源が出した波の数と，観測者が受け取った波の数が同じであるので

$$f_0\varDelta t = f_1\varDelta t_1 \qquad \therefore \quad f_1 = \frac{f_0\varDelta t_0}{\varDelta t_1} \qquad \cdots(答)$$

2.音源が A, A'間の距離は $v\varDelta t$ であるので

$$v\varDelta t = d - d' \qquad \cdots ①$$

また，問題中の式より

$$d - d' = ct_1 - c(t_1 + \varDelta t_1 - \varDelta t) = c(\varDelta t - \varDelta t_1) \qquad \cdots ②$$

①，②式より

$$v\varDelta t = c(\varDelta t - \varDelta t_1) \qquad \therefore \quad \frac{\varDelta t_1}{\varDelta t} = \frac{c}{c - v} \qquad \cdots(答)$$

3. 1，2の答より

$$f_1 = \frac{f_0\varDelta t_0}{\varDelta t_1} = \frac{c}{c - v}f_0 \qquad \cdots ③ \quad \cdots(答)$$

(ドップラー効果の公式そのものである)

[B]4. 風がある場合，音波が伝わる速さは風下に向かって $c + w$ となる。t_0 まで速さ c で，それ以降 $c + w$ で伝わるので

$$d = ct_0 + (c + w)(t_2 - t_0) = ct_2 + w(t_2 - t_0) \qquad \cdots ④$$

5. 同様に

$$d' = c(t_0 - \varDelta t) + (c + w)(t_2 + \varDelta t_2 - t_0) = c(t_2 + \varDelta t_2 - \varDelta t) + w(t_2 + \varDelta t_2 - t_0) \qquad \cdots ⑤$$

6. A, A'の距離について，②式はそのまま成り立つ。また，④，⑤式より

$$d - d' = c\varDelta t - (c + w)\varDelta t_2$$

この式と，②式より

$$v\varDelta t = c\varDelta t - (c + w)\varDelta t_2 \qquad \therefore \quad \frac{\varDelta t}{\varDelta t_2} = \frac{c + w}{c - v} \qquad \cdots(答)$$

7. [A]と同様に考えて

$$f_2 = \frac{f_0\varDelta t_0}{\varDelta t_2} = \frac{c + w}{c - v}f_0 \qquad \cdots(答)$$

8. 風が吹き始めてから発せられた音は，音速が $c + w$ で単純に音源が速さ v で動く場合のドップラー効果となる。③式の音速を $c + w$ として

$$f'_2 = \frac{c + w}{c + w - v}f_0 \qquad \cdots(答)$$

9. 時間 t_3 の間に，風により音波の発信元が A から B に移動したと考える。

$$s = wt_3 \qquad \cdots(答)$$

10. 時間 t_3 で O に到着した音は，B から速さ c で発信されたと考えるので

$s' = ct_3$　　…(答)

11. 三平方の定理より

$$d = \sqrt{s'^2 - s^2} = \sqrt{c^2 - w^2}\, t_3$$

12. 同様に考えて, A, A'間の距離 d'は

$$d' = \sqrt{c^2 - w^2}\left(t_3 + \Delta t_3 - \Delta t\right)$$

ゆえに

$$d - d' = \sqrt{c^2 - w^2}\left(\Delta t - \Delta t_3\right)$$

②式の関係は, この場合も成り立つので

$$v\Delta t = \sqrt{c^2 - w^2}\left(\Delta t - \Delta t_3\right) \qquad \therefore \quad \frac{\Delta t}{\Delta t_3} = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v}$$

[A], [B]と同様に

$$f_1 = \frac{f_0 \Delta t_0}{\Delta t_3} = \frac{\sqrt{c^2 - w^2}}{\sqrt{c^2 - w^2} - v} f_0 \qquad \cdots(答)$$

(A から O に向かう音波の速さは$\sqrt{c^2 - w^2}$ である。ドップラー効果の公式の音速をこれに置き換えた場合に相当する)