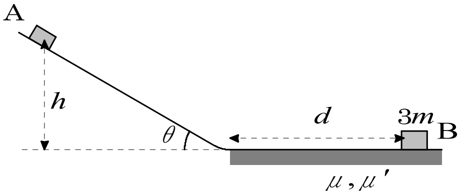

図 1

図１のように，水平面と角 θ〔rad〕をなす斜面上の高さ h〔m〕の位置に質量 m〔kg〕の小物体Ａが保持され，斜面の最下点から距離 d〔m〕の水平の位置に質量 $3m$〔kg〕の小物体Ｂが置かれている。いずれの小物体もその大きさは無視できる。斜面は滑らかで摩擦は無視できるが，水平部分は静止摩擦係数 μ および動摩擦係数 μ' をもつ粗い面である。いま，斜面上の小物体Ａを静かに放すとすべり始めた。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。小物体Ａは斜面から水平部に滑らかに移行でき，また $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるとして，以下の文章の[　]に適切な数式を入れよ。

問１ 斜面の最下点での小物体Ａの速さは[(1)]〔m/s〕である。その後，小物体Ａが水平部分を距離 d だけ進んだとすると，摩擦のため熱となって失われるエネルギーは μ' を用いて[(2)]〔J〕である。これより，小物体Ａが水平部分を距離 d 進むためには，h ≧[(3)]を満たす必要がある。以下，この不等式が満たされているとする。その場合，小物体Ａは小物体Ｂと衝突する。衝突直前の小物体Ａの速さは，v_1=[(4)]〔m/s〕と表せる。衝突により小物体Ｂも動き出した。衝突直後の小物体Ａと小物体Ｂの速度の水平成分を，図１の右向きを正方向として，それぞれ v'_1〔m/s〕および v'_2〔m/s〕とする。すると，衝突前後における運動量保存則は，v_1 と v'_1 および v'_2 を用いて[(5)]と書ける。反発係数が１の場合における v'_1 は，v_1 を用いて v'_1=[(6)]〔m/s〕と表すことができる。

次に問１と同じ実験を，一定の加速度の大きさ a〔m/s²〕で水平左方向に進む乗り物の内部で行った。このとき，乗り物の外で静止している人からは，図１の実験装置全体が左方向に大きさ a で加速されている。一方，実験の観測者は乗り物の内部にいる。この観測者が見る現象に関して，以下の[　]に適切な数式を入れよ。

問２ 水平面上にある小物体Ｂが実験開始直後に静止し続けるための条件は，水平面での静止摩擦係数 μ を用いて[(7)]と書ける。一方，静かに放した小物体Ａが斜面から離れずにすべり落ちるための条件は[(8)]である。以下，これらの条件が満足されているとする。小物体Ａに働く斜面方向の加速度の大きさは[(9)]〔m/s²〕となる。斜面の最下点における小物体Ａの速さは v＝[(10)]〔m/s〕と表せる。また，この小物体Ａが静止している小物体Ｂと衝突するための条件は，v^2 ≧ [(11)]と書くことができる。

(解説)エネルギーと仕事の問題であるが，問１は基本問題である。

問２は，加速度系内の観測者から見た運動であるが，まず，慣性力を考えること。以下は，慣性力も普通の力と同じと考えて，つりあいや運動方程式を考える。

また，この観測者からは慣性力は普通の力なので，慣性力がする仕事も普通に計算すればよい。

問 1. (1)最下点での速さを υ_0 とすると，力学的エネルギー保存則より

$$mgh = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \qquad \therefore \quad \upsilon_0 = \sqrt{2gh} \qquad \cdots(答)$$

(2)動摩擦力の大きさは $\mu' mg$ で動摩擦の働く方向と，小物体Aの運動方向は逆なので，動摩擦力の仕事 W は負で

$$W = -\mu' mgd$$

動摩擦のする仕事により減少した運動エネルギーが熱になるので

$$\mu' mgd \ \cdots(答)$$

(3)距離 d だけ進んで運動エネルギーが正である必要がある

$$\frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \mu' mgd = mgh - \mu' mgd \geqq 0 \qquad \therefore \quad h \geqq \mu' d \qquad \cdots(答)$$

(4) 小物体Ａの運動エネルギーの変化が，小物体Ａがされた仕事なので，(1)の υ_0 も代入して

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 - \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 = -\mu' mgd$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_1^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 - \mu' mgd = mgh - \mu' mgd$$

$$\therefore \qquad \upsilon_1 = \sqrt{2g(h - \mu' d)} \qquad \cdots(答)$$

(5)運動量保存則は

$$m\upsilon_1 = m\upsilon'_1 + 3m\upsilon'_2 \qquad \cdots①$$

(6)反発係数の式を作ると

$$1 = -\frac{\upsilon'_1 - \upsilon'_2}{\upsilon_1} \qquad \cdots②$$

①，②式より υ'_1 を求めると

$$\upsilon'_1 = -\frac{\upsilon_1}{2} \qquad \cdots(答)$$

問 2(7)小物体Bには，図１のように水平右向きに大きさ $3ma$ の慣性力が働く(図には鉛直方向の力は省略してある)。Bが動かないためには，左向きに働く静止摩擦力とつりあう必要がある。静止摩擦力が最大静止摩擦以下なら動かない。鉛直方向のつりあいより，Bと水平面の間の垂直抗力の大きさは $3mg$ なので

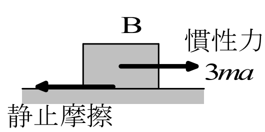

図 1

$$3ma \leqq 3\mu mg \qquad \therefore \quad a \leqq \mu g \qquad \cdots(答)$$

(8)小物体Aに働く力は図 2 となる。ただし，斜面からの垂直抗力を N とする。斜面に垂直方向のつりあいより

$$N + ma\sin\theta - mg\cos\theta = 0$$

$$\therefore \quad N = mg\cos\theta - ma\sin\theta$$

斜面から浮き上がらないためには，$N \geqq 0$ である必要があるので

$$N = mg\cos\theta - ma\sin\theta \geqq 0$$

$$\therefore \quad a \leqq \frac{g}{\tan\theta} \qquad \cdots(\text{答})$$

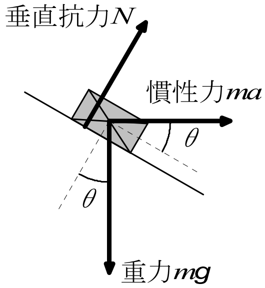

図 2

(9)小物体Aの斜面に沿った方向の加速度を α として，運動方程式をつくる。

$$m\alpha = mg\sin\theta + ma\cos\theta \qquad \therefore \quad \alpha = g\sin\theta + a\cos\theta \qquad \cdots(\text{答})$$

(10)最下点まで斜面をすべり降りる距離 S は $S = \dfrac{h}{\sin\theta}$ である。等加速度運動の公式より

$$v^2 = 2\alpha S = 2(g\sin\theta + a\cos\theta)\frac{h}{\sin\theta}$$

$$\therefore \quad v = \sqrt{2h\left(g + \frac{a}{\tan\theta}\right)} \qquad \cdots(\text{答})$$

(11)水平面を滑る小物体Aに，水平方向に働く力は図 3 となる。Bと衝突するまでに動摩擦力がする仕事を W_1，慣性力がする仕事を W_2 とすると

$$W_1 = -\mu' mgd$$

$$W_2 = mad$$

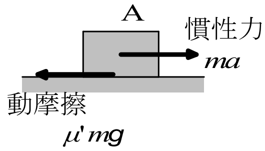

図 3

小物体Bと衝突するにはBの位置で運動エネルギーが正である必要がある。

$$\frac{1}{2}mv^2 + W_1 + W_2 \geqq 0$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \mu' mgd + mad \geqq 0$$

$$\therefore \quad v^2 \geqq 2d(\mu' g - a) \qquad \cdots(\text{答})$$

(別解)水平面上での小物体Aの加速度を β とすると，運動方程式より

$$m\beta = ma - \mu' mg \qquad \therefore \quad \beta = a - \mu' g$$

ゆえに，Bの位置での小物体Aの速さを v' とすると

$$v'^2 - v^2 = 2\beta d$$

$$\therefore \quad v'^2 = v^2 + 2\beta d$$

B に到達するには $v'^2 \geqq 0$ であればよいので

$$v'^2 = v^2 + 2\beta d \geqq 0$$

$$\therefore \quad v^2 \geqq -2\beta d = 2d(\mu' g - a)$$