図１のように，面積 S〔m²〕の薄い正方形の極板ＡとＢを距離 d〔m〕だけ隔てて真空中に平行に配置し，スイッチ Sw および起電力 V〔V〕の電池と導線で接続した。極板 B は接地されている。最初スイッチ Sw は開いており，極板ＡとＢに蓄えられている電気量(電荷)はゼロであった。真空の誘電察を ε_0〔F/m〕で表す。極板間に生じる電界(電場)は一様であるとして，以下の文章の［　］に適切な数式を人れよ。問題文に現れる記号は解答に用いてよい。

問１ スイッチ Sw を閉じて十分な時間が経過したとき，極板 A, B 間にできる電界の大きさは，V と d を用いて［ (1) ］〔V/m〕と表せる。一方、極板Ａに蓄えられた電気量を Q〔C〕とすると，極板A, B間の電界の大きさは，Q, ε_0, S を用いて［ (2) ］〔V/m〕と表せる。したがって，極板 A, B の電気容量 $C=\dfrac{Q}{V}$ は，ε_0, S, d を用いて C＝［ (3) ］〔F〕と表せる。また，極板 A, B 間に蓄えられた静電エネルギーは，Q と C を用いて［ (4) ］〔J〕となる。

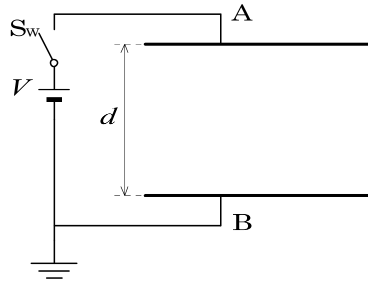


図 1

問２ 次に，極板 A, B と同じ面積 S の正方形金属板 M を用意した。その厚さは $\dfrac{d}{4}$ である。

この金属板 M には，問１で極板Ａに蓄えられた電気量の２倍の電気量 $2Q$ が蓄えられている。図２に示すように，スイッチを閉じたままの状態で極板 A, B 間の電圧を V に保ち，この金属板Ｍを極板Ａ, B 間に平行にゆっくり挿入した。ここで，極板 A, Bと金属板 M は，極板に垂直な方向からみて正確に重なっているものとする。十分時間が経過した後，極板ＡとＢに蓄えられた電気量をそれぞれ Q_A〔C〕と $-Q_B$〔C〕とする。ここで Q_A と Q_B は正である。回路が接地されているため $Q_A-Q_B+2Q=0$ であることに注意して，Q_A と Q_B を Q のみを用いて表すと，Q_A＝［ (5) ］〔C〕，Q_B＝［ (6) ］〔C〕となる。また，極板Ａと金属板Ｍの間に生じた電界の大きさは，Cを用いて［ (7) ］〔V/m〕であり，金属板Ｍを含む極板A, B 間に蓄えられた静電エネルギーは，Cを用いて［ (8) ］〔J〕となる。その後スイッチ Sw を開いて，金属板 M を極板 A に向かってゆっくりと距離 $\dfrac{d}{4}$ だけ平行移動させた。この平行移動に要した仕事は C を用いて［ (9) ］〔J〕である。このとき極板Ａと金属板Mの間に生じた電界の大きさは C を用いて［ (10) ］〔V/m〕であり，極板Ａの電位は V を用いて［ (11) ］〔V〕になる。

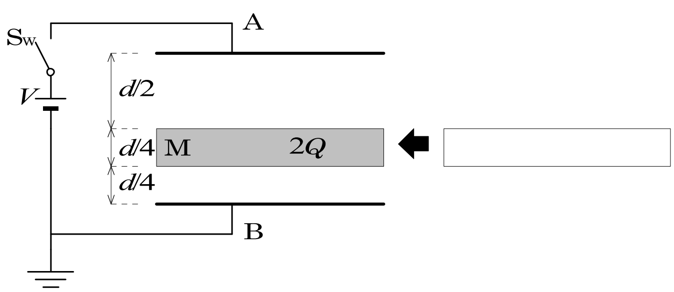


図 2

（解説）この問題では，回路が接地(アース)されている。接地(アース)とは①大きな導体に接続する。②その地点が電位 0V となる。

この問題の場合，帯電した金属板を挿入した際，アースから電荷が供給されるので極板 A, B に関して電荷の保存則は成立しない。電荷に成り立つ関係が問題文中にあるので，それを利用しよう。

問 1(1)電界の大きさ E は

$$E=\frac{V}{d} \qquad \cdots①$$

(2)ガウスの法則より，極板 A から出た電気力線の本数は $\dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ である。単位面積あたりの本数が電界の大きさなので

$$E=\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad \cdots②$$

(3)①，②式より容量 C を求める。

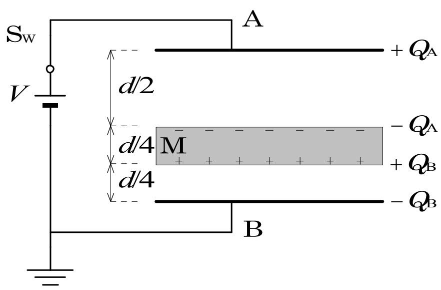
$$\frac{V}{d}=\frac{Q}{\varepsilon_0 S} \qquad \therefore \quad C=\frac{Q}{V}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \qquad \cdots(答)$$

(4)蓄えられた静電エネルギー U は

$$U=\frac{Q^2}{2C} \qquad \cdots(答)$$

問 2(5)，(6)M を挿入する前に蓄えられている電荷 Q は

$$Q=CV \qquad \cdots③$$



A と M の上面，M の下面と B でそれぞれコンデンサーを形成する。容量をそれぞれ C_A，C_B とすると，容量は極板間隔に反比例するので

$$C_A=2C \quad , \quad C_B=4C$$

また，極板間の電圧をそれぞれ V_A，V_B とすると

$$Q_A=C_AV_A=2CV_A \qquad \cdots④$$

$$Q_B=C_BV_B=4CV_B \qquad \cdots⑤$$

また，電位の関係より

$$V=V_A+V_B \qquad \cdots⑥$$

問題文中の式より

$$Q_A-Q_B+2Q=0 \qquad \cdots⑦$$

③，④，⑤，⑥，⑦式より

$$V_A=\frac{V}{3}\ ,\ V_B=\frac{2V}{3}$$

ゆえに

$$Q_A=\frac{2}{3}CV=\frac{2}{3}Q \qquad \cdots(答)$$

$$Q_B=\frac{8}{3}CV=\frac{8}{3}Q \qquad \cdots(答)$$

(⑦式は問題文中に示されているが，M に対する電荷の保存則から考えてもよい。つまり，図のように M の上面には $-Q_A$，下面には $+Q_B$ の電荷がたまるが，M はアースされていないので総電荷は保存され $2Q$ である。ゆえに

$$-Q_A+Q_B=2Q$$

となる。)

(7)AM 間の電場の大きさ E_A を, (2)と同様に求めると,

$$E_A=\frac{Q_A}{\varepsilon_0 S}=\frac{2Q}{3\varepsilon_0 S}=\frac{2Q}{3}\cdot\frac{d}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{1}{d}=\frac{2Q}{3Cd}\qquad\cdots(答)$$

(8)AM 間, MB 間に蓄えられ静電エネルギーの総和 U_{AB} は

$$U_{AB}=\frac{Q_A^2}{2C_A}+\frac{Q_B^2}{2C_B}=\frac{\left(\frac{2Q}{3}\right)^2}{2\cdot 2C}+\frac{\left(\frac{8Q}{3}\right)^2}{2\cdot 4C}=\frac{Q^2}{C}\qquad\cdots(答)$$

(9)Sw を開いているので, AM 間, MB 間に蓄えられている電荷は変化しない。容量はそれぞれ C'_A, C'_B となり

$$C'_A=4C\quad,\quad C'_B=2C$$

となる。ゆえに蓄えられ静電エネルギーの総和 U'_{AB} は

$$U'_{AB}=\frac{Q_A^2}{2C'_A}+\frac{Q_B^2}{2C'_B}=\frac{\left(\frac{2Q}{3}\right)^2}{2\cdot 4C}+\frac{\left(\frac{8Q}{3}\right)^2}{2\cdot 2C}=\frac{11Q^2}{6C}$$

金属板 M を移動させる仕事 W が静電エネルギーの変化になるので

$$W=U'_{AB}-U_{AB}=\frac{33Q^2}{18C}-\frac{Q^2}{C}=\frac{5Q^2}{6C}\qquad\cdots(答)$$

(10)電荷は変化していないので, 電界の大きさ E_A は変化しない。

$$E_A=\frac{2Q}{3Cd}\qquad\cdots(答)$$

(11)AM 間, MB 間の電圧を V'_A, V'_B とすると, 極板 A の電位 V' は

$$V=V'_A+V'_B=\frac{Q'_A}{C'_A}+\frac{Q'_B}{C'_B}=\frac{\frac{2Q}{3}}{4C}+\frac{\frac{8Q}{3}}{2C}=\frac{3Q}{2C}=\frac{3}{2}V\qquad\cdots(答)$$