次の文章の[　]に適切な数式を入れよ。

天井からつり下げたばね定数 k〔N/m〕の軽いつる巻きばねの先に質量 m〔kg〕のうすい板が固定されている。鉛直下向きに x 軸をとり，ばねが自然長のときの板の位置を原点とする。また，重力加速度を g〔m/s^2〕とする。

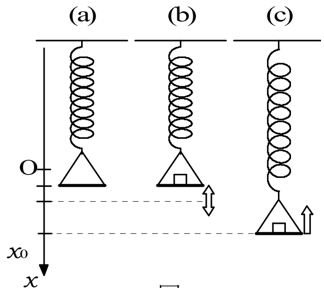

図 1

問１　図 1(a)のように板が静止しているとき，板の位置は[(1)]〔m〕であり，重力による板の位置エネルギーとばねの弾性エネルギーの和は[(2)]〔J〕である。ただし，位置エネルギーは原点を基準とする。

問２　図 1(a)のように静止した板に質量 $2m$〔kg〕の小さなおもりを置き静かに手を離すと，図 1(b)のようにおもりと板は一体となり単振動をはじめた。振動の中心では力がつりあうことから，振動の中心の位置は[(3)]〔m〕であり，振幅は[(4)]〔m〕である。また，周期は[(5)]〔s〕である。

問３　板に問２と同じおもりを置き，図 1(c)のように x_0〔m〕まで引き下げて静止させた後に静かに手を離すと，おもりと板は一体となり上昇しはじめた。上昇の途中でおもりは板から離れ，重力による減速を受けながら上昇を続け，速度が０となった所で最高点に達した。おもりと板が一体となって上昇する間，板の位置が x〔m〕のときの下向きの加速度を a〔m/s^2〕，おもりが板から受ける垂直抗力の大きさを N〔N〕とする。おもりと板の運動方程式は，それぞれ，以下のように与えられる。

おもり:$2ma$=[(6)]　　板:ma=[(7)]

おもりが板から離れる瞬間の板の位置は[(8)]〔m〕である。おもりが到達する最高点の位置は[(9)]〔m〕である。実際におもりが板から離れて運動するためには，x_0＞[(10)]〔m〕でなければならない。

(解説)単振動の入試標準問題である。単振動の中心は力がつりあっている位置である。また，単振動の端では速度が 0 で，中心から端までが振幅である。

(9)では，単振動のエネルギーで考えよう。

問 1(1)板の位置を x_1 とする。つりあいより

$$mg - kx_1 = 0 \qquad \therefore \qquad x_1 = \frac{mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)位置エネルギーの和 U_1 は，(1)の x_1 も代入して

$$U_1 = -mgx_1 + \frac{1}{2}kx_1^2 = -\frac{(mg)^2}{2k} \qquad \cdots(\text{答})$$

問 2(3)振動の中心を x_2 とする。中心では力がつりあっているので，板とおもりを一体と考えて力のつりあいより

$$mg + 2mg - kx_2 = 0 \qquad \therefore \qquad x_2 = \frac{3mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)振動の上端は x_1 である。ゆえに振幅 A は

$$A = x_1 - x_2 = \frac{2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

(5)ばね定数 k のばねに質量 $3m$ の物体が接続された単振動である。周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{k}} \qquad \cdots(\text{答})$$

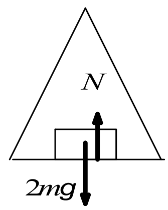

図 1

問 3(6)おもりに働く力は図 1 のようになる。運動方程式は

$$2ma = 2mg - N \quad \cdots① \qquad \cdots(\text{答})$$

(7)板(ばねとの接続点も含む)に働く力は図 2 のようになる。運動方程式は

$$ma = mg + N - kx \qquad \cdots② \qquad \cdots(\text{答})$$

(8)①，②式より N を求めると

$$N = \frac{2}{3}kx$$

$N = 0$ の点でおもり離れるので，そのときの板の位置 x_3 は

$$x_3 = 0 \qquad \cdots(\text{答})$$

(9)このときのおもりの速度 v は

$$\frac{1}{2}k(x_0 - x_2)^2 = \frac{3}{2}mv^2 + \frac{1}{2}k(x_3 - x_2)$$

$$v = \sqrt{\frac{kx_0}{3m}(x_0 - 2x_2)} = \sqrt{\frac{kx_0}{3m}\left(x_0 - \frac{6mg}{k}\right)}$$

最高点を x_4 とすると

$$0 - v^2 = 2gx_4$$

$$\therefore \qquad x_4 = -\frac{kx_0}{6m}\left(x_0 - \frac{6mg}{k}\right) \qquad \cdots(\text{答})$$

(10)板とおもりが一体となっているとき，単振動の振幅は

$$A' = x_0 - x_2$$

ゆえに単振動の上端の位置 x は

$$x = x_0 - 2A' = -x_0 + 2x_2$$

おもりが離れるためには $x < 0$ である必要があるので

$$-x_0 + 2x_2 < 0$$

$$x_0 > 2x_0 = \frac{6mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$