シリンダー内に，物質量 n〔mol〕の単原子分子理想気体が，気密を保ちつつなめらかに動くピストンによって閉じ込められている。図１はシリンダー内の気体の，圧力 p〔Pa〕と体積 V〔m³〕の変化の様子を図示したものである。このシリンダーとは別に，絶対温度 T_0〔K〕，物質量 n_0〔mol〕の単原子分子理想気体が入った，体積一定の容器(蓄熱器)がある(図 2)。単原子分子理想気体の定積モル比熱を C_V〔J/mol･K〕とし，気体以外の物体の熱容量は無視できるとして，以下の問に答えよ。

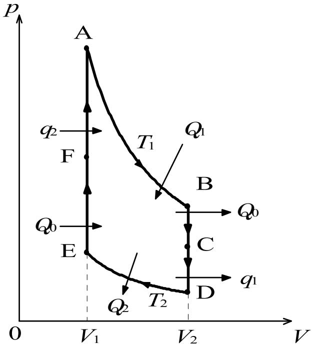


図 1

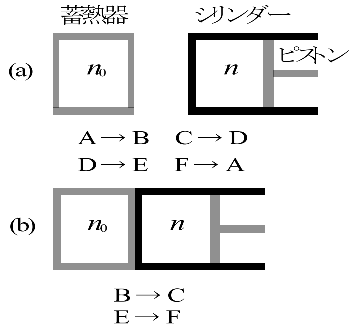
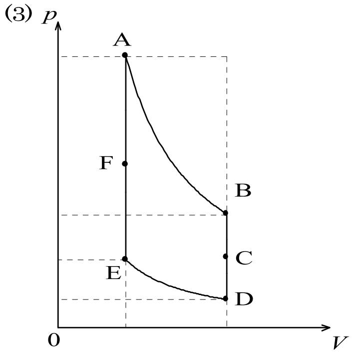


図２



I. A→B の過程では，シリンダーは蓄熱器とは接触せず(図 2(a))，気体は絶対温度を T_1〔K〕に保ったまま，体積が V_1〔m³〕から V_2〔m³〕まで膨張する。この過程でシリンダー内の気体が外部から受け取った熱量 Q_1〔J〕と，外部にした仕事 W_1〔J〕との間の関係を，$\boxed{\text{(1)}}$ に述べよ。また，その関係が成り立つ理由を，「熱力学の第１法則」，「内部エネルギー」，「等温変化」の三つの語句を用いて，$\boxed{\text{(2)}}$ に述べよ。また，仕事 W_1 の大きさは $\boxed{\text{(3)}}$ の図のどの部分の面積に等しいか，斜線で示せ。

II. 以下の文章中の(4)から(10)までの欄の中に，適切な数式を入れて文章を完成せよ。ただし，数式は各欄に記載した文字のみを用いて表せ。

B→C の過程では，シリンダーは蓄熱器と接触し，シリンダー内の気体は体積一定のまま，温度 T_0($T_0 < T_1$)の蓄熱器内の気体とのみ熱をやりとりする(図 2(b))。その結果，シリンダー内の気体も蓄熱器内の気体も同じ温度になる。その温度を T'_0〔K〕とすると

$$T'_0 = \boxed{\text{(4)}\,n,\ n_0} \times T_0 + \boxed{\text{(5)}\,n,\ n_0} \times T_1$$

となる。この過程でシリンダー内の気体が蓄熱器内の気体に与える熱量を Q_0〔J〕とする。

C→D の過程では，シリンダーは蓄熱器との接触を断たれ(図 2(a))，シリンダー内の気体は，体積を一定に保ったまま，外部に熱量 q_1 を放出して絶対温度 T_2〔K〕まで冷却される。

D→E の過程でも，シリンダーは蓄熱器と接触せず(図 2(a))，シリンダー内の気体は温度を T_2 に保ったまま，体積が V_1 に戻るまで圧縮される。この過程ではシリンダー内の気体は外部から W_2〔J〕の仕事をされ，Q_2〔J〕の熱量を外部に放出する。このとき $\dfrac{W_2}{W_1} = \boxed{\text{(6)}\,T_1,\ T_2}$ である。

E→F の過程では，シリンダーは温度 T'_0 の蓄熱器と再び接触し(図 2(b))，シリンダー内の気体は、体積一定のまま蓄熱器の気体から熱を受け取り，シリンダー内の気体も蓄熱器内の気体も同じ温度になる。もしこの温度が T_0 に等しければ，蓄熱器内の気体は，B→C の過程でシリンダー内の気体から受け取った熱量 Q_0 をシリンダー内の気体に返し，もとの状態に戻ったことになる。すなわち，蓄熱器は熱を再利用する役割を果たす。このようになるために，あらかじめ蓄熱器の最初の温度 T_0 をある値に設定しておいた。その値は，シリンダー内の気体の内部エネルギーの増加分 $\boxed{\text{(7)}\,n,\ C_v,\ T_0,\ T_2}$ が Q_0 に等しいという条件から求まり，

$T_0 = \boxed{(8)n,\ n_0} \times T_1 + \boxed{(9)n,\ n_0} \times T_2$

で与えられる。

F→A の過程では，シリンダーは蓄熱器との接触が断たれ(図 2(a))，シリンダー内の気体は，体積一定のまま，外部から熱量 q_2〔J〕を受け取って，もとの状態 A に戻る。

シリンダーと蓄熱器を合わせた系の熱効率 e は，1 サイクルの間に外部にした仕事 $W_1 - W_2$ を，外部から受け取った熱の総量 $Q_1 + q_2$ で割ったものとして定義され，e は n_0 に依存する関数，$e = e(n_0)$となる。熱を再利用するための蓄熱器がない場合，すなわち $n_0 = 0$ の場合の熱効率を e_0 と書けば，

$$\frac{e(n_0)}{e_0} = \frac{1 + \alpha(T_1 - T_2)}{1 + \boxed{(10)n, n_0} \times \alpha(T_1 - T_2)} \geqq 1$$

となる。ここで $\alpha = \dfrac{nC_V}{Q_1}$ である。この式から，蓄熱器のおかげで熱効率が改善されていることがわかる。

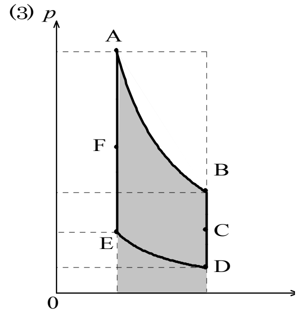
(解説)蓄熱器との熱のやりとりをどう扱うかがポイントになってくる。これは，温度の異なる水を混ぜる問題を思い出せばよい。すなわち，一方が失う熱と，もう一方が得る熱が等しいとして式を立てればよい。

(6)で等温変化の仕事の比を求める。仕事そのものを求めるには積分して求める必要があるが，比だけであれば積分の必要がない。

Ⅰ(1) $Q_1 = W_1$ …① …(答)

(2)等温変化であるので，気体の内部エネルギーの変化はない。ゆえに熱力学第１法則より，気体に与えた熱量と，気体が外部にした仕事は等しい。

(3)A→B の曲線の下部分となる。



Ⅱ(4)(5)シリンダー内の気体が失った熱量と，蓄熱器内の気体が得た熱量が等しい。いずれも定積変化をするので

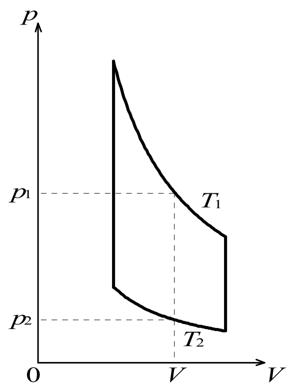
$$nC_V\left(T_1 - T'_0\right) = n_0\left(T'_0 - T_0\right)$$

$$\therefore \quad T'_0 = \frac{n_0T_0 + nT_1}{n + n_0} \quad \cdots②$$

(4) $\dfrac{n_0}{n+n_0}$ ，(5) $\dfrac{n}{n+n_0}$ …(答)

(6)それぞれ状態変化を示す曲線の下の面積が仕事の大きさを表す。A→B は温度 T_1，D→E は温度 T_1 の等温曲線であることより比を求めてみよう。右図のようにある体積 V のときの A→B，D→E の圧力をそれぞれ p_1，p_2 とすると

$$\frac{p_1V}{T_1} = \frac{p_2V}{T_2} \qquad \therefore \quad \frac{p_2}{p_1} = \frac{T_2}{T_1}$$



となり，常に A→B と D→E でグラフの高さの比が $\dfrac{T_2}{T_1}$ となる。

ゆえに，面積の比＝仕事の比も同じで

$$\frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1} \quad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

(別解)積分して仕事も求めてもよい。

$$W_1 = \int_A^B pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{nRT_1}{V}dV = nRT_1 \log\frac{V_2}{V_1}$$

$$W_2 = \left|\int_D^E pdV\right| = \left|\int_{V_2}^{V_1} \frac{nRT_2}{V}dV\right| = nRT_2 \log\frac{V_2}{V_1}$$

$$\therefore \quad \frac{W_2}{W_1} = \frac{T_2}{T_1}$$

(7)シリンダー内の気体の温度が T_2 から T_0 に上昇するので，内部エネルギーの増加 ΔU は

$$\Delta U = nC_V\left(T_0 - T_2\right) \quad \cdots(答)$$

(8)，(9)蓄熱器内の気体の温度が T'_0 から T_0 に下降する。シリンダー内の気体の得た熱が，蓄熱機内の気体の失った熱である。

$$nC_V\left(T_0 - T_2\right) = n_0C_V\left(T'_0 - T_0\right)$$

②式の T'_0 を代入して，T_0 を求める。

$$T_0 = \frac{n_0T_1 + \left(n+n_0\right)T_2}{n + 2n_0} \quad \cdots④$$

(8) $\dfrac{n_0}{n+2n_0}$, (9) $\dfrac{n+n_0}{n+2n_0}$ …(答)

(10)①式より $W_1 = Q_1$

また，③式より $W_2 = \dfrac{T_2}{T_1}W_1 = \dfrac{T_2}{T_1}Q_1$

ゆえに $W_1 - W_2 = \dfrac{T_1 - T_2}{T_1}Q_1$ …⑤

また，F から E は温度 T_0 から T_1 への定積変化であるので

$$q_2 = nC_V\left(T_1 - T_0\right)$$

④式の T_0 を代入して

$$q_2 = nC_V\left(T_1 - \frac{n_0T_1 + \left(n+n_0\right)T_2}{n+2n_0}\right) = nC_V\frac{\left(n+n_0\right)\left(T_1 - T_2\right)}{n+2n_0} \quad \cdots ⑥$$

⑤，⑥式より効率 $e(n_0)$ は

$$e\left(n_0\right) = \frac{W_1 - W_2}{Q_1 + q_2} = \frac{\dfrac{T_1 - T_2}{T_1}Q_1}{Q_1 + nC_V\dfrac{\left(n+n_0\right)\left(T_1 - T_2\right)}{n+2n_0}}$$

ここで，$\alpha = \dfrac{nC_V}{Q_1}$ で整理すると

$$e\left(n_0\right) = \frac{T_1 - T_2}{\left\{1 + \alpha\dfrac{\left(n+n_0\right)\left(T_1 - T_2\right)}{n+2n_0}\right\}T_1}$$

この式で，$n_0 = 0$ として

$$e_0 = \frac{T_1 - T_2}{\left\{1 + \alpha\left(T_1 - T_2\right)\right\}T_1}$$

ゆえに

$$\frac{e\left(n_0\right)}{e_0} = \frac{1 + \alpha\left(T_1 - T_2\right)}{1 + \alpha\dfrac{\left(n+n_0\right)\left(T_1 - T_2\right)}{n+2n_0}}$$

∴ (10) $\dfrac{n+n_0}{n+2n_0}$ …(答)