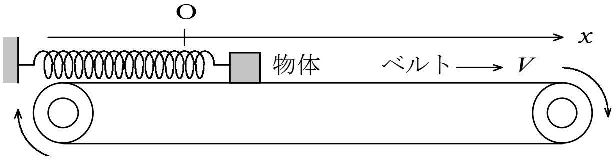

図のように，一定の速さ V で水平に動くベルトがある。一端を壁に固定したばね定数 k の水平なばねのもう一端に質量 m の物体をつけ、物体をベルトにのせる。物体とばねとの間の静止摩擦係数を μ_1，動摩擦係数を μ_2 とする。重力加速度の大きさを g として以下の問に答えよ。ただし，物体の速さは，ベルトの速さ V より常に小さいものとし，またベルトの十分に長く，物体がベルトの水平面から出ることはないものとする。

ばねが自然長のときの物体の位置を原点 O とし，水平にベルトの運動方向に x 軸をとる。

(1)物体をある位置でベルトに静かに置くと，物体は静止したままであった。このときの x 座標を求めよ。

物体を $x=d$ の位置ではなすと， x 軸負方向に動き出した。ただし，その後の運動で物体の速さはベルトの速さ V より常に小さかった。

(2)物体の位置が x のとき，物体の加速度を a として運動方程式をつくれ。

(3)物体は単振動をする。単振動の中心，振幅，速度の最大値を求めよ。

(4)物体をはなした後，初めて原点を通過するときの速さを求めよ。

(5)物体をはなした後，初めて静止する位置の x 座標と，はなしてからの時間を求めよ。

(6)物体は初めて静止した後，どのような運動をするか概略を述べよ。

物体を(1)で求めた位置で初速度 v_0 ($v_0 < V$)で x 軸正方向に滑らせると，物体は単振動をした。

(7)単振動の振幅を求めよ。

(8)物体が原点を通過するときの速さを求めよ。

(解説)運動方程式が

$$ma=-Kx+C \quad (K,\ C\text{ は定数})$$

となる場合の単振動と，単振動の位置エネルギーを復習して欲しい。

ベルトから物体に働く動摩擦力は，ベルトから見た相対速度と逆向きである。ベルトの速さの方が大きいときは，ベルトから見た物体の速度は x 軸負方向となり，動摩擦力は正方向に働く。

物体のある位置での速さを求める場合，動摩擦力がする仕事が力学的エネルギーの変化がなることを利用して解いてもよいが，単振動のエネルギーを使う方が効率よく解ける。単振動の中心からの変位が X のときの速度を v とし，振幅 A，速度の最大値 v_0 とすると

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}KX^2=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

(1)物体の速度は 0 なので，ベルトから見た相対速度は x 軸負方向で，物体には x 軸正方向の動摩擦力が働く。物体が静止し続けるためには，ばねの弾性力と，動摩擦力がつりあう位置である。この位置を x_0 として

$$-kx_0+\mu_2mg=0 \qquad \therefore \qquad x_0=\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

(2)同様に動摩擦力は x 軸正方向である。ゆえに，運動方程式は

$$ma=-kx+\mu_2mg \quad \cdots① \quad \cdots(\text{答})$$

(①式は，物体が単振動することを示している。角振動数 ω と周期 T は

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad , \qquad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

である。)

(3)中心では $a=0$ であるので，中心の位置 x_1 は①式より

$$0=-kx_1+\mu_2mg \qquad \therefore \qquad x_1=\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

で，(1)の x_0 と同じである。

また，$x=d$ の位置が速さ 0 で，単振動の右端である。ゆえに振幅 A_1 は

$$A_1=d-x_1=d-\frac{\mu_2mg}{k} \qquad \cdots(\text{答})$$

速度が最大になるのは単振動の中心を通過するときであり，その速さを v_1 とすると

$$v_1=A_1\omega=\left(d-\frac{\mu_2mg}{k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \cdots(\text{答})$$

(4)単振動であるので，中心 x_1 からの変位を X とすると，単振動の位置エネルギーは $\frac{1}{2}kX^2$ であらわせる。原点では $X=0-x_1=-\frac{\mu_2mg}{k}$ であるので，速さを v として，単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(-\frac{\mu_2mg}{k}\right)^2=\frac{1}{2}kA_1^2=\frac{1}{2}K\left(d-\frac{\mu_2mg}{k}\right)^2$$

$$\therefore \qquad v=\sqrt{\frac{kd^2}{m}-2\mu_2gd} \qquad \cdots(\text{答})$$

(別解)最初に原点に到達するまでに，動摩擦力が物体にする仕事は $-\mu_2mgd$ である。力学的エネルギーの変化が，保存力以外の仕事であるので

$$\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}Kd^2=-\mu_2 mgd \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{kd^2}{m}-2\mu_2 gd}$$

(5)初めに静止する位置 x は，単振動の左端であるので

$$x=d-2A=-d+\frac{2\mu_2 mg}{k} \qquad \cdots(答)$$

また時間 t は，単振動の半周期なので

$$t=\frac{T}{2}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \cdots(答)$$

(6)物体は右へ動き出すが，常にベルトの方が速く動摩擦力は x 軸正方向に働く。ゆえに，物体の運動方程式は①式と同じであるので，中心も振幅も変化しない。

中心 $x_1=\frac{\mu_2 mg}{k}$，振幅 $A_1=d-\frac{\mu_2 mg}{k}$ の単振動を続ける。 $\cdots$(答)

(7)物体に働く力を考えると運動方程式は①式となり，先ほどと同じ単振動をする。ゆえに物体は単振動の中心で速度 v_0 をもつことになり，振幅を A_2 として，単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}kA_2^2 \qquad \therefore \quad A_2=v_0\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \cdots(答)$$

(8)原点を通過する速さを v として

$$\frac{1}{2}mv_0^2=\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k\left(-\frac{\mu_2 mg}{k}\right)^2$$

$$\therefore \quad v=\sqrt{v_0^2-\frac{(\mu_2 mg)^2}{k}} \qquad \cdots(答)$$