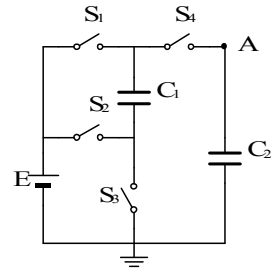


起電力  $V_0$  の電池  $E$ , 容量がいずれも  $C$  のコンデンサー  $C_1$ ,  $C_2$  およびスイッチ  $S_1, S_2, S_3, S_4$  をもちいて図のような回路をつくった。はじめスイッチは全て開かれており, コンデンサーには電荷が蓄えられてなかった。



- (1)はじめにスイッチ  $S_1, S_3$  を閉じる。十分時間が経過した後、コンデンサー  $C_1$  に蓄えられる電荷を求めよ。
- (2)  $S_1, S_3$  を開いてから  $S_2, S_4$  を閉じる。十分時間が経過した後、図の A 点の電位およびコンデンサー  $C_1, C_2$  に蓄えられる電荷を求めよ。
- (3)  $S_2, S_4$  を開いてから  $S_1, S_3$  を閉じる。十分時間が経過した後、コンデンサー  $C_1$  に蓄えられる電荷を求めよ。
- (4) 再び  $S_1, S_3$  を開いてから  $S_2, S_4$  を閉じる。十分時間が経過した後、図の A 点の電位およびコンデンサー  $C_1, C_2$  に蓄えられる電荷を求めよ。
- (5)これらのスイッチ操作を繰り返すと, A 点の電位はある一定値になる。一定値を求めよ。

(解説)コンデンサーのつなぎ換えの問題である。いつものように

- ① 電荷の保存則    ② 電位を考える

で解いていけばよい。それぞれのスイッチが入った状態の図をしっかりと書こう。

スイッチ操作を繰り返した結果、一定値となる場合の解き方であるが、途中の状態に囚われずに、最終結果だけを考える方がよい。最終的にスイッチ操作をしても状態が変化しないことにより解くと簡単に解ける。

また、 $n$ 回目と $n+1$ 回目のスイッチ操作より、漸化式を作ってもよいが、計算は面倒になる。

なおこの回路であるが、電源電圧よりも高い電圧(2倍)が A 点で得られる。直流電源の電圧を上げることは結構難しいが、この回路で実現できる。このような回路をチャージポンプという。

- (1)スイッチの接続状態を考えて、余計な部分を消すと図 1 のような状態になる。C<sub>1</sub>には電池の電圧  $V_0$ かかっているの、C<sub>1</sub>に蓄えられる電気量  $Q_0$ は

$$Q_0 = CV_0 \quad \dots(\text{答})$$

- (2)同様に余計な部分を消すと図 2 のような状態になる。C<sub>1</sub>、C<sub>2</sub>に蓄えられる電荷をそれぞれ  $Q_1$ 、 $Q'_1$  電圧をそれぞれ  $V_1$ 、 $V'_1$ とすると

$$Q_1 = CV_1 \quad , \quad Q'_1 = CV'_1$$

電荷の保存則より

$$Q_0 = Q_1 + Q'_1$$

$$\therefore CV_0 = CV_1 + CV'_1 \quad \dots(1)$$

また、電位を考えて

$$V_0 + V_1 = V'_1 \quad \dots(2)$$

- ①, ②式より

$$V_1 = 0 \quad , \quad V'_1 = V_0$$

A 点の電位は  $V'_1 = V_0 \quad \dots(\text{答})$

$$Q_1 = 0 \quad , \quad Q'_1 = CV_0 \quad \dots(\text{答})$$

- (3)図 1 のような接続状態に戻る。C<sub>1</sub>には電池の電圧  $V_0$ かかっているの電荷は  $Q_0$ に戻る。

$$Q_0 = CV_0 \quad \dots(\text{答})$$

- (4)再び図 2 の状態に戻る。C<sub>1</sub>、C<sub>2</sub>に蓄えられる電荷をそれぞれ  $Q_2$ 、 $Q'_2$  電圧をそれぞれ  $V_2$ 、 $V'_2$ とすると、(2)と同様に

$$Q_2 = CV_2 \quad , \quad Q'_2 = CV'_2$$

電荷の保存則より

$$Q_0 + Q'_1 = Q_2 + Q'_2$$

$$\therefore CV_0 + CV_0 = CV_2 + CV'_2 \quad \dots(3)$$

また、電位を考えて

$$V_0 + V_2 = V'_2 \quad \dots(4)$$

- ③, ④式より

$$V_2 = \frac{V_0}{2} \quad , \quad V'_2 = \frac{3V_0}{2}$$

A 点の電位は  $V'_2 = \frac{3V_0}{2} \quad \dots(\text{答})$

$$Q_2 = CV_2 = \frac{CV_0}{2} \quad , \quad Q'_2 = CV'_2 = \frac{3CV_0}{2} \quad \dots(\text{答})$$

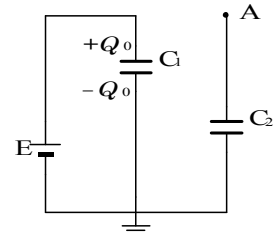


図 1

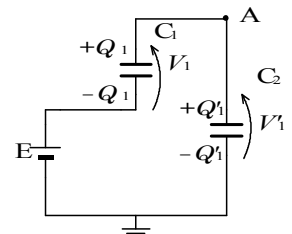


図 2

(5)  $S_2, S_4$ を開いて  $S_1, S_3$ を閉じた状態では、必ず  $C_1$ の電圧は  $V_0$ で、蓄えられる電荷は  $Q_0$ となる。A 点の電位が一定になるとは、この状態から  $S_1, S_3$ を開いて  $S_2, S_4$ を閉じてても変化がない。つまり、電荷は移動せず  $C_1$ の電圧は  $V_0$ のままであるということである。このときの  $C_2$ の電圧を  $V'$ とすると、図 2 の状態で  $C_1$ の電圧が  $V_0$ なので、電位を考えて

$$V' = V_0 + V_0 = 2V_0 \quad \dots(\text{答})$$

(別解)

スイッチ操作を  $n$ 回繰り返して、 $S_2, S_4$ を閉じた状態で  $C_2$ の電圧を  $V'_n$ とする。 $S_2, S_4$ を開いてから  $S_1, S_3$ を閉じた状態では、必ず  $C_1$ の電圧は  $V_0$ で、電荷  $Q_0 = CV_0$ となる。さらに  $S_1, S_3$ を開いて  $S_2, S_4$ を閉じたとき、 $C_1, C_2$ の電圧をそれぞれ  $V_{n+1}, V'_{n+1}$ とすると、電荷の保存則より

$$CV_0 + CV'_n = CV_{n+1} + CV'_{n+1} \quad \dots(3)$$

また、電位を考えて

$$V_0 + V_{n+1} = V'_{n+1} \quad \dots(4)$$

(3), (4)式より

$$V'_{n+1} = V_0 + \frac{V'_n}{2} \quad \dots(5)$$

はじめにコンデンサーに電荷が蓄えられていないので、スイッチを操作する前の  $C_2$ の電圧を  $V'_0 = 0$ として、(5)式の漸化式より

$$V'_n = 2 \left\{ 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n \right\} V_0$$

$n \rightarrow \infty$ として極限值  $V'$ は

$$V'_n = 2V_0$$