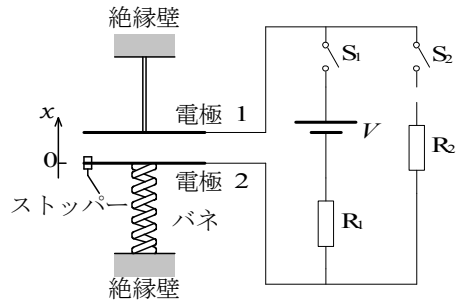


図1のように、真空中に二枚の平板電極1, 2を水平に配置し、平行板コンデンサーを構成する。電極1は天井の絶縁壁に固定されており、電極2はバネ定数  $k$  のバネを介して、床の絶縁壁に固定されている。電極1, 2はともに一辺が  $L$  の正方形である。はじめに、バネが自然長となる位置に周囲と絶縁されたストッパーを用いて電極2を固定したところ、電極1と電極2の距離は  $d$  であった。この状態を初期状態とする。鉛直方向に  $x$  軸をとり、初期状態の電極2の位置を原点とする。



両者の電極は、導線を介して、図に示す回路に接続されている。 $L$ は電極間距離に比べ十分大きく、電極表面の電荷は均一に分布するものとし、電極端部の影響は無視する。また、バネおよび導線の質量、導線の電気抵抗ならびに電池の内部抵抗は無視できるものとする。最初、スイッチ  $S_1, S_2$  は共に開いており、電極1, 2には電荷は無かった。真空の誘電率を  $\epsilon_0$  とする。

問1. まず、電極2を  $x=0$  の位置に固定した状態で、スイッチ  $S_1$  を閉じ起電力  $V$  の電池を用いてコンデンサーを充電した。

- (1) 十分に時間が経過した後、電極1に蓄えられた電荷  $Q$  はいくらか。  $L, d, V, \epsilon_0, k$  の中から必要な記号を用いて答えよ。
- (2) また、コンデンサーに蓄えられた静電エネルギー  $U_C$  はいくらか。  $L, d, Q, \epsilon_0, k$  の中から必要な記号を用いて答えよ。

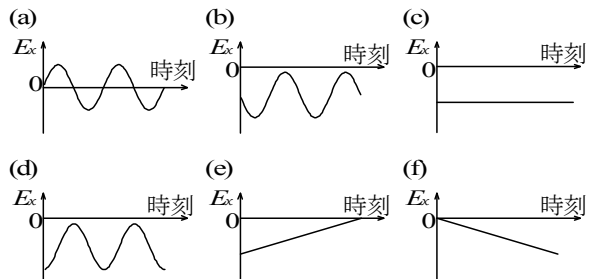
問2. 次に、スイッチ  $S_1$  を開いて電池を切り離れた。

- (1) 仮に、電極1を水平に保ったまま微小距離  $\Delta x$  だけゆっくりと上昇させたとする。この場合の静電エネルギーの増加  $\Delta U_C$  を答えよ。
- (2) 二枚の電極は正負に帯電しているので、引力を及ぼしあっている。電極を動かす時の外力の大きさがこの引力の大きさに等しいとして、電極間に働く引力  $F$  の大きさを答えよ。ただし、電極1の質量は無視する。

問3. さらに、スイッチ  $S_1$  を開いたまま、電極2のストッパーを静かに外したところ、電極2は上昇を始めた。ストッパーを外した瞬間の時刻を0とし、その後の電極2の運動について考察する。ただし、電極2は水平を保って運動するものとし、電極1に触れないものとする。また、電極2の質量を  $m$ 、重力加速度の大きさを  $g$  とする。

- (1) 時刻0で電極が上昇するために  $Q$  が満たすべき条件を答えよ。
- (2) 電極2が到達する最上点の座標  $x_M$  はいくらか。  $L, d, Q, \epsilon_0, k, m, g$  から必要な記号を用いて答えよ。

(3) 電極間の電界の  $x$  成分  $E_x$  の時間変化を表すグラフとして、最も適するものを、次の(a)から(f)の中から選べ。



問4. 最後に、電極2が最上点の位置に来たところで、電極位置を再び固定し、次にスイッチ  $S_2$  を閉じた。スイッチを閉じて十分時間が経つまでに抵抗  $R_2$  で消費されるエネルギーを  $U_{R2}$  とすると、 $U_{R2}$  と問1(2)で求めた、最初にコンデンサーに蓄えられた静電エネルギー  $U_C$  との差は次式によって与えられる。

$d, Q, \epsilon_0, k, m, g$  から必要な記号を用いて [ ] を埋めよ。

$$U_C - U_{R2} = [ \quad ] x_M^2 + [ \quad ] x_M$$

(解説) 極板同士に働く引力(静電気力)の大きさも求める問題は入試として基本であるので、確実に理解しておくように。理解した上で極板面積  $S$  のコンデンサーに電荷  $Q$  が蓄えられているとき、静電気力の大きさ  $F$  は極板間の誘電率を  $\epsilon$  として

$$F = \frac{Q^2}{2\epsilon S}$$

であることを覚えておくことと便利である。特に、電荷  $Q$  が一定の場合、極板間隔が変化しても、力は一定であることに注意しよう。

電池や抵抗をつながずに極板を移動させるとき、極板にした仕事が静電エネルギーの変化となる。

極板間の電場の大きさ  $E$  は、

$$E = \frac{Q}{\epsilon S}$$

である。これは、ガウスの法則より極板間の電気力線の本数が  $\frac{Q}{\epsilon}$  であり、電場の大きさは単位面積あたり通過する電気力線の本数であることから簡単に求まるが、覚えておくことと便利である。電荷  $Q$  と極板面積  $S$  で決まる。

問4では、答に使用してよい文字に注意しよう。

問1(1)このときのコンデンサーの容量  $C = \frac{\epsilon_0 L^2}{d}$  であるので

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 L^2 V}{d} \quad \dots \textcircled{1} \quad \dots (\text{答})$$

(2)静電エネルギー  $U_C$  は

$$U_C = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L^2} \quad \dots \textcircled{2} \quad \dots (\text{答})$$

問2. スイッチを開いているのでコンデンサーに蓄えられた電荷は  $Q$  のままである。

(1)極板を上昇させた後の静電エネルギーを  $U'_C$  とする。電荷  $Q$  は一定であるので②式を参考に

$$U'_C = \frac{Q^2(d + \Delta x)}{2\epsilon_0 L^2}$$

ゆえに増加量  $\Delta U_C$  は

$$\Delta U_C = U'_C - U_C = \frac{Q^2(d + \Delta x)}{2\epsilon_0 L^2} - \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L^2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} \Delta x \quad \dots (\text{答})$$

(2)極板1には極板2からの引力(静電気力)が鉛直下向きに働くので、外力は上向きに加える。ただし重力は問題の指示より無視。また、微少な距離なのでバネの弾性力も無視するので、外力の大きさは引力(静電気力)と等しく  $F$  である。ゆえに外力のした仕事は、 $F\Delta x$  である。これが静電エネルギーの変化量  $\Delta U_C$  と等しいので

$$F\Delta x = \Delta U_C = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} \Delta x$$

$$\therefore F = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} \quad \dots (\text{答})$$

問3(1)極板2に働く重力より、引力(静電気力)が大きければよい。バネは自然長であるので弾性力は考えなくてよい。ゆえに

$$mg < \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} \quad \therefore Q > L\sqrt{2\epsilon_0 mg} \quad \dots (\text{答})$$

(2) 電荷  $Q$  は一定であるので、極板間隔が変化しても引力(静電気力)は  $F$  で一定である。力学的エネルギーの変化が引力(静電気力)による仕事であるので

$$mgx_M + \frac{1}{2}kx_M^2 = Fx_M$$

$$\therefore x_M = 0, \frac{2(F - mg)}{k}$$

$x = 0$  は最初の位置なので不適である。ゆえに

$$x_M = \frac{2(F - mg)}{k} = \frac{Q^2 - 2\epsilon_0 mgL^2}{\epsilon_0 kL^2} \quad \dots \textcircled{4} \quad \dots (\text{答})$$

(別解) 極板 2 の位置が  $x$  のとき、極板 2 に働く合力を  $f$  とすると

$$f = F - mg - kx$$

$F$  は一定であるので、極板 2 は単振動をする。その中心  $x_0$  は

$$0 = F - mg - kx_0 \quad \therefore x_0 = \frac{F - mg}{k}$$

$x = 0$  が最下点であるので、単振動の振幅  $A = x_0$  である。ゆえに最上点は

$$x_M = 2A = \frac{2(F - mg)}{k} = \frac{Q^2 - 2\epsilon_0 mgL^2}{\epsilon_0 kL^2}$$

(3) 初めの位置で電場の大きさ  $E$  を  $Q$  を用いて表すと、①式より

$$E = \frac{V}{d} = \frac{Q}{\epsilon_0 L^2}$$

で、向きは  $x$  負の向きである。

電荷  $Q$  は一定であるので、極板間隔が変化しても電場の大きさは変化しない。

ゆえにグラフは (c)  $\dots$  (答)

問 4. スイッチ  $S_2$  を閉じるとコンデンサーは放電し、十分時間が経過すると電荷はなくなる。この間、蓄えられていた静電エネルギーはすべて抵抗  $R_2$  でジュール熱に変わる。ゆえに最上端でもつ静電エネルギーが  $U_{R_2}$  である。電極が  $x = 0$  の位置から最上丹間で移動する間、重力とバネのした仕事が静電エネルギーの変化となるので

$$U_{R_2} - U_C = -mgx_M - \frac{1}{2}kx_M^2$$

$$\therefore U_C - U_{R_2} = mgx_M + \frac{1}{2}kx_M^2 \quad \dots (\text{答})$$

(参考)

$U_{R_2}$  を求めればよいので②式より

$$U_{R_2} = \frac{Q^2(d - x_M)}{2\epsilon_0 L^2}$$

これより

$$U_C - U_{R_2} = \frac{Q^2 d}{2\epsilon_0 L^2} - \frac{Q^2(d - x_M)}{2\epsilon_0 L^2} = \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} x_M$$

となるが、答に  $L$  を含み、問題の要件を満たさない。そこで④式より  $L^2$  を求めて代入すれば答えは出るが、計算が多くなってしまふ。