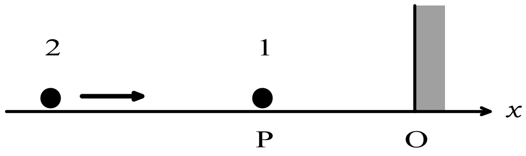
以下の問 1，2，3 に答えよ。ただし，全問において運動は水平な平面上の x 軸に沿った１次元運動とし，摩擦および空気の抵抗は無視してよい。



図

(1)図のように，点Pに静止している質量 m_1 の粒子１に左から速度 v_0 で質量 m_2 の粒子２が弾性衝突した。衝突後の，粒子 1，2 の速度 v_1，v_2 を求めよ。

　その後，粒子１は点 O で壁によって跳ね返される(衝突は弾性衝突とする。)。粒子１が再び，粒子２と衝突するとすれば，2 つの粒子の質量 m_1，m_2 の間にどのような関係があるか。

(2)質量 m の粒子をたくさん乗せた台車がある。この台車から毎秒１個ずつ粒子を動いている台車から見て速さ u で後方(x 軸の負の向き)に発射するものとする。ある時刻において，台車全体の質量が M，速度が V，その1秒後の速度が V'であった。台車の速度の増加($V'-V$)はいくらであるか。

(3)ロケットは，連続的にガスを噴射して推進する。いま，単位時間あたり質量 λ のガスをロケットからみて一定の速さ u で後方に噴射するとする。ある時刻 t_0 においてロケットの質量が M，速度が V であった。時刻 $t_0+\Delta t$ におけるロケットの速度 V'を求めよ。ただし，Δt は微小とする。また，時刻 t_0 におけるロケットの加速度 a を求めよ。

(解説)衝突と分裂の基本的な問題なのだが

(1)の衝突する条件は，考え落としの内容に慎重に考えよう。

(2)，(3)の分裂(ガスの噴射)では，相対速度で与えられているので，x 軸から見た速度にしっかりと変換すること。

(1)運動量保存則より

$$m_2 v_0 = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

また，弾性衝突であるのではねかえり係数１としてよい。

$$1 = -\frac{v_2 - v_1}{v_0}$$

これら２式より

$$v_1 = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \quad , \quad v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 \qquad \cdots(答)$$

粒子１が壁と衝突した後，粒子２と衝突するための条件を，いくつかわけて考える。

（ｉ）$v_2 \geqq 0$ の場合

粒子２は図の右に向かっているか静止しているので，壁ではね返った粒子１と必ず衝突する。ゆえに

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 \geqq 0 \qquad \therefore \quad m_2 \geqq m_1 \qquad \cdots(条件1)$$

（ⅱ）$v_2 < 0$ の場合

$$v_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 < 0$$

つまり $m_2 < m_1$ の場合，粒子２は図の左に向かっているので，壁ではね返った粒子１のほうが速ければいずれ衝突する。

$$|v_2| < |v_1|$$

$$-\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_0 < \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_0 \qquad \therefore \quad m_2 > \frac{m_1}{3}$$

ゆえに　$m_1 > m_2 > \frac{m_1}{3}$　…(条件 2)

条件 1，2 のいずれかを満たせばよいので　$m_2 > \frac{m_1}{3}$　…(答)

(2)質量 M，速度 V の台車から粒子を発射し，発射後，質量 $M - m$，速度 V' となった台車から粒子を見ると相対速度が $-u$ になった。粒子の x 軸に対する速度を v とすると

$$-u = v - V' \qquad \therefore \quad v = V' - u$$

また運動量保存則より

$$MV = (M - m)V' + mv$$

$$\therefore \quad V' - V = \frac{m}{M} u \qquad \cdots(答)$$

(3)微少時間 Δt の間に噴射されたガスの質量は $\lambda \Delta t$ である。これが(2)の m に相当するので

$$V' = V + \frac{\lambda u}{M} \Delta t \qquad \cdots(答)$$

加速度 a は

$$a = \frac{V' - V}{\Delta t} = \frac{\lambda u}{M} \qquad \cdots(答)$$