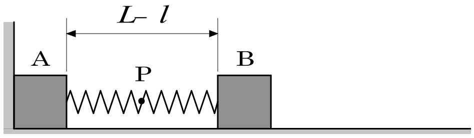
質量が m である２つの小さな物体 A と B を，自然長 L，ばね定数 k の重さが無視できるばねの両端につける。それを，物体 A が鉛直な壁に接するように，水平な床の上に置く。図に示すように，物体 B に力を加えてばねを自然長から長さ l だけゆっくり縮め，瞬時に力を除く。物体 A が壁から離れた後，ばねの中点 P から見て，物体 A と物体 B はそれぞれ単振動する。物体の運動に関する以下の問いに答えよ。ただし，床と壁は平らでなめらかである。



(a) 物体 A が壁から離れるときの，物体 B の速さ v_0 を求めよ。

(b) 物体 A が壁から離れた直後の，ばねの中点 P の速さ v_P を v_0 を用いて表せ。

(c) 物体 A が壁から離れる時刻を $t = 0$ とし，その後，ばねの長さがはじめて自然長 L になる時刻を $t = t_1$ とする。 t_1 を求めよ。

(d) 時刻 $t = t_1$ の後，ばねの長さが次に自然長 L になる時刻を $t = t_2$ とする。時刻 $t = (t_1 + t_2)/2$ におけるばねの長さ L_S を L と l を用いて表せ。

(e) 時刻 $t = t_2$ における物体 A の速さ v_A を求めよ。

(f) 時刻 $t = t_2$ に，物体 B に水平方向の撃力を加えたところ，ばねの中点 P が静止した。撃力とは極めて短い時間に物体に作用する力である。撃力の力積の大きさ I を v_0 を用いて表せ。

(解説)重心から見る単振動の典型的な問題である。物体Aが壁から離れた後，物体AとB(及びばね)からなる体系に外力は働かない。このような状況では，重心の速度は一定である。物体AとBの運動は複雑だが，等速運動している重心から見ると，それぞれ半分の長さのばねによる単振動となる。ばね定数は長さに反比例するので半分の長さのばねのばね定数は $2k$ である。物体Aが壁から離れたときの重心から見た相対速度をよく考えて，A, Bそれぞれ独立した単振動と考える。

(a)物体Aが壁から離れるのは，ばねからの力が右向きになった瞬間，つまりばねが自然長のときである。力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 \qquad \therefore \quad \upsilon_0 = l\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \cdots① \quad \cdots(答)$$

(b) $$\upsilon_P = \frac{m\times 0 + m\upsilon_0}{m+m} = \frac{\upsilon_0}{2} \qquad \cdots(答)$$

(c) $t=0$ で，重心から物体A, Bを見ると相対速度はそれぞれ左向きに $\frac{\upsilon_0}{2}$，右向きに $\frac{\upsilon_0}{2}$ となる。このときばねは自然長で，物体A, Bに力は働かないので，重心から見る単振動はそれぞれこの位置が中心である。ゆえに，物体A, Bは中心での速さ $\frac{\upsilon_0}{2}$ で，左右対称な単振動をする(図参照)。半分の長さのばねのばね定数は $2k$ なので，単振動の周期 T は同じで

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

である。初めて自然長に戻るのは，単振動の半周期後であるので

$$t_1 = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \qquad \cdots(答)$$

(d) t_1 の次に自然長に戻るのはさらに半周期後なので $t_2 = T$ である。ゆえに t は

$$t = \frac{(t_1+t_2)}{2} = \frac{3T}{4}$$

このとき，図よりばねは最も縮んでおり，重心から見た相対速度は0である。ゆえに床から見た物体A, Bの速度はともに $\frac{\upsilon_0}{2}$ で，ばねの自然長からの縮みを x とすると

力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kl^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{\upsilon_0}{2}\right)^2 \times 2 + \frac{1}{2}kx^2$$

①式の υ_0 を代入して x を求めると

$$x = \pm\frac{l}{\sqrt{2}}$$

ばねは縮んでいるので，ばねの長さは

$$L - x = L - \frac{l}{\sqrt{2}} \qquad \cdots(答)$$

（別解）物体 A, B の重心から見た単振動の振幅をともに a とすると

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 2ka^2$$

①式も用いて

$$a=\frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{m}{2k}}=\frac{l}{2\sqrt{2}}$$

ゆえにばねの長さは

$$L-2a=L-\frac{l}{\sqrt{2}}$$

(e)重心から見て左に $\dfrac{v_0}{2}$ であるので，床から見る速度 v_{A} は

$$v_A=-\frac{v_0}{2}+\frac{v_0}{2}=0 \qquad \cdots(\text{答})$$

(f)A の速度は0なので，B を静止させれば重心の速度は0となる。B の速度は v_0 なので静止させるのに必要な力積は $-mv_0$ である。

$$I=\left|-mv_0\right|=mv_0 \qquad \cdots(\text{答})$$