次の文を読んで，[ ]に適した式または数をそれぞれ記せ。

図１のように，水平な床の上を摩擦なしに動くことのできる質量 M〔kg〕の台車がある。台車上で，質量 m〔kg〕の小球がばね定数 k〔N/m〕のばねで台車の端につながれ，一方の端には質量 m_0〔kg〕の小物体が置かれている。はじめ，ばねは自然長であり，台車，小球，および小物体は静止している。小物体を速度 v_0〔m/s〕で小球に向けて滑らせた後の，台車，小球，および小物体の運動について考える。以下，台車に固定した座標系を D，床に固定した静止座標系を S と呼ぶ。座標系 D での小球の位置は，ばねが x〔m〕縮んだときを正，伸びたときを負として座標 x で表す。座標系 S では右方向を正とする。運動は全て同一鉛直面内で起こり，ばねは質量が無視でき十分長く，台車と小球の間の摩擦は常に無視できるとする。重力加速度の大きさを g〔m/s²〕とする。

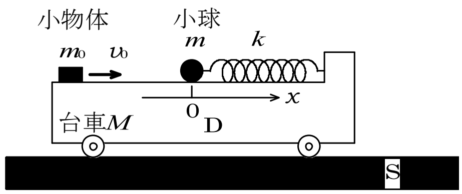

図 1

(1)小物体と台車の間の摩擦が無視でき，小物体は一回だけ小球と完全弾性衝突をし，以後小球と衝突することはなかったとする。衝突直後の小物体の速度は[イ]〔m/s〕，小球の速度 v〔m/s〕は v＝[ロ]である。ここで，衝突後の台車と小球の運動を考えよう。小球の座標が x であるとき，座標系 S で台車の運動を観測すると，台車の加速度 b〔m/s²〕は，b＝[ハ]である。この時の座標系 D での小球の加速度を a〔m/s²〕とすると，小球の運動方程式は b を用いて ma＝[ニ]と書ける。この式から，座標系 D での小球の運動は単振動であり，その周期は[ホ]〔s〕，振動の中心は x＝[ヘ]であることがわかる。この単振動の振幅を求めるために，ばねが最も縮んだ時を考える。この時の座標系 S での台車と小球の速度は，両者の相対速度が 0 であることと運動量保存則を使って，v を用いて[ト]〔m/s〕と表される。この結果とエネルギー保存則を使うと，振幅は v を用いて[チ]〔m〕と表されることがわかる。

(2)次に，小物体と台車の間に摩擦があり，小物体は小球に衝突することなく台車上で静止したとする。小物体が静止するまでの運動を考える。ただし，動摩擦係数を μ とする。小球の座標が x であるとき，座標系 S での台車の加速度 b'〔m/s²〕は b'＝[リ]である。この時の座標系 D での小球の加速度を a'〔m/s²〕 とすると，小球の運動方程式は b'を用いて ma'＝[ヌ]と書ける。これより，座標系 D での小球の運動は単振動であり，その中心は x＝[ル]であることがわかる。

(解説)とにかく，一つ一つ，基本を積み重ねることが大切である。１つ１つ見ていくと

- 初めの小物体と小球の衝突は瞬間的に起こると考えてよいので，ばねからの力積は考えなくてよい。同様に，台車にもばねは影響を及ぼさないと考えてよい。
- 小物体と台車間に摩擦がない場合，衝突後の小物体は台車上にあっても水平方向に何の力も及ぼさないので台車，小球の運動に影響を与えない。
- ばねが x 縮んでいるとき，ばねは両端から伸びる方向にそれぞれ力を及ぼしている。
- 慣性力は観測者(座標系)の加速度を基準に考える。加速度 b で動いている座標系 D 内で，加速度 a で運動している小球に働く慣性力の大きさは ma ではなく，mb である。
- 質量 m の物体が変位 x にある時の運動方程式が，a を加速度，K, B を定数とし

  $$ma = -Kx + B$$

  となるとき，物体は単振動をする。角振動数 ω と周期 T はそれぞれ

  $$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad , \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

  また，単振動の中心は，加速度が 0 の位置である。
- 単振動の振幅は中心から端までの距離である。単振動の端は速度が 0 の点である。この問題で小球は座標系 D に対して単振動をする。座標系 D で見た場合，慣性力が働くことさえ考えれば，あとは座標系 D が加速度運動をしているとか考える必要はない。従って単振動の端は，座標系 D から見て速度が 0 の点である。

(1)(イ)衝突後の小物体の速度を v'，小球の速度を v とする。運動量保存則より

$$m_0 v_0 = m_0 v' + m v \qquad \cdots①$$

弾性衝突であるので，はねかえり係数 1 である。ゆえに

$$1 = -\frac{v' - v}{v_0} \qquad \cdots②$$

①，②式より

$$v' = \frac{m_0 - m}{m_0 + m} v_0 \qquad \cdots(答)$$

(ロ)①，②式より $\quad v = \dfrac{2m_0}{m_0 + m} v_0 \qquad \cdots$(答)

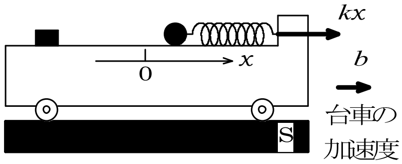

図 1

(ハ)図1のように台車には，ばねからの力 kx が働く。ゆえに，台車に関する運動方程式は

$$Mb = kx$$

$$\therefore \quad b = \frac{kx}{M} \qquad \cdots③ \quad \cdots(答)$$

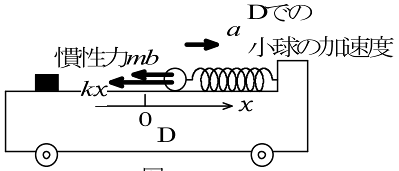

図 2

(ニ)座標系 D で見ると，図 2 のように小球には mb の慣性力が働く。座標系 D での小球の運動方程式は

$$ma = -kx - mb \qquad \cdots(答)$$

(ホ)小球の運動方程式に③式の b を代入して

$$ma = -kx - \frac{m}{M}kx = -\left(\frac{M+m}{M}\right)kx$$

これは単振動であり，周期 T は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{M+m}{M}k}} = 2\pi\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \qquad \cdots(答)$$

(ヘ)中心は，加速度 a が 0 となる点なので

$$0=-\left(\frac{M+m}{M}\right)kx \qquad \therefore \quad x=0 \qquad \cdots(答)$$

(ト)小球と台車の速度は等しい。速度を V とおくと運動量保存則より

$$mv=(M+m)V \qquad \therefore \quad V=\frac{mv}{M+m} \qquad \cdots(答)$$

(チ)台車上から見てばねが最も縮んだときが単振動の右端である。単振動の中心が $x=0$ なので，右端の x 座標＝ばねの縮み　が単振動の振幅となる。振幅を A として，台車と小球の力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}(M+m)V^2+\frac{1}{2}kA^2$$

(ト)の V を代入して A を求める。

$$\therefore \quad A=v\sqrt{\frac{mM}{k(M+m)}} \qquad \cdots(答)$$

(2)(リ)台車には図 3 のような力が働く。ゆえに台車に対する運動方程式は

$$Mb'=kx+\mu m_0 g$$

$$\therefore \quad b'=\frac{1}{M}(kx+\mu m_0 g) \qquad \cdots④ \quad \cdots(答)$$

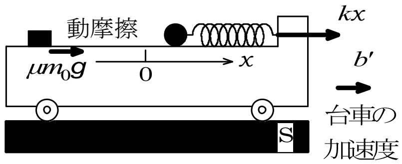

図 3

(ヌ)(ニ)と同様に慣性力を考えて，小球の運動方程式より(図 4)

$$ma'=-kx-mb' \qquad \cdots(答)$$

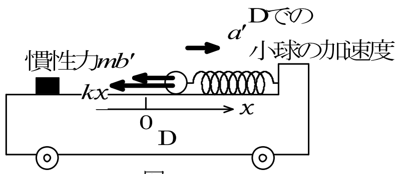

図 4

(ル)運動方程式に④式を代入する。

$$ma'=-kx-\frac{m}{M}(kx+\mu m_0 g)=-k\left(\frac{M+m}{M}\right)x-\frac{\mu m m_0 g}{M}$$

これは単振動の式であり，加速度 $a'=0$ となる位置が中心である。

$$0=-k\left(\frac{M+m}{M}\right)x-\frac{\mu m m_0 g}{M} \qquad \therefore \quad x=-\frac{\mu m m_0 g}{k(M+m)} \qquad \cdots(答)$$