次の文を読んで，[　　]に適した式または数を答よ。

小物体Pが，一定の速度 v〔m/s〕で，上空から鉛直方向に落下してくる。地上の点Aに観測者がいて，Aから音波を発射し，小物体Pで反射されて再びAに戻ってくる音波を測定する。これにより，点Aから小物体Pの地上への落下地点Bまでの距離 $\overline{AB}$〔m〕と，その落下時刻を決定することを考えよう。以下では，音速を w〔m/s〕とする。

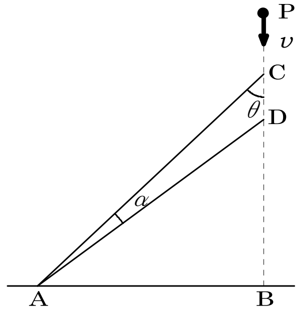

図 1

地上の点Aより，時刻 $t=0$ から $t=\Delta t$〔s〕までの短い時間 Δt の間，振動数 f〔Hz〕の音波を発射したところ，この音波が小物体Pで反射し，時刻 $t=T$〔s〕から始まる短い時間に点Aで振動数 F〔Hz〕の音波として再び聞こえた。図１のように，Aから発射した音波をPが受け始めた位置をC，受け終わった位置をD，PがCからDまで落下する時間を Δs〔s〕，角度ACBを θ〔rad〕，角度CADを α〔rad〕とする。さて，時間差 $\Delta t-\Delta s$ と距離 $\overline{AC}$〔m〕，$\overline{AD}$〔m〕および音速 w の間には

$$\Delta t-\Delta s=[\ \text{あ}\ ] \qquad \cdots\cdots(1)$$

の関係がある。図１から，$\overline{AC}=\overline{AD}\cos\alpha+\overline{CD}\cos\theta$ の関係が成り立つが，音波を発射する時間 Δt が充分短く，したがって距離 $\overline{CD}$ が距離 $\overline{AC}$，$\overline{AD}$ に比べて充分小さければ，$\alpha \fallingdotseq 0$ ($\cos\alpha \fallingdotseq 1$)と近似できる。この近似を用いると，距離 $\overline{AC}$ は距離 $\overline{AD}$，θ，v，Δs を用いて $\overline{AC}=[\ \text{い}\ ]$ と表される。よって式(1)から，Δt は Δs に比例し，$\dfrac{\Delta t}{\Delta s}=[\ \text{う}\ ]$ となることがわかる。Aから発せられた振動数 f の音波が，Pに乗った人には振動数 f_P〔Hz〕に聞こえたとすると，点Aで発した音波の波の数とPで受け取った波の数が等しいことから，f, f_P, Δt, Δs の間には，[　え　]の関係がある。したがって，f_P と f の比を θ，w，v を用いて表すと

$$\frac{f_P}{f}=[\ \text{お}\ ] \qquad \cdots\cdots(2)$$

となる。Pで反射してAに戻って来た音波の振動数 F については，Pから振動数 f_P の音波が発射されると考え，上と同様の考察をすると，

$$\frac{f_P}{F}=1-\frac{v}{w}\cos\theta \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。したがって，式(2)と式(3)から，$\cos\theta$ は v，w, f, F を用いて，$\cos\theta=[\ \text{か}\ ]$ と表される。AC間を音波が伝わる時間は[　き　]$\times T$ だから，距離 $\overline{AB}$ は v，w, f および測定量 F, T を用いて，$\overline{AB}=[\ \text{く}\ ]$ で与えられる。また，Pが地上の点Bに落下する時刻を $t=t_B$〔s〕とすると，t_B も v，w, f および測定量 F, T を用いて，$t_B=[\ \text{け}\ ]$ で与えられる。

(解説)音波の到達時間の差からドップラー効果の式を求める問題であるが，(1)式は，観測者が動く場合，(2)は音源が動く場合のドップラー効果の式よりすぐにわかる。ただし，いずれの場合も視線方向の速度を適用すること。つまり，(1)では観測者 P の A に対する視線速度が $v\cos\theta$, (2)では，音源 P の A に対する視線速度が $v\cos\theta$ と考える。

あ. C で音が聞こえ始めた時刻を t_1 とすると

$$t_1 = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{w}$$

D で音が聞こえ終わる時刻 t_2 は

$$t_2 = \varDelta t + \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{w}$$

ゆえに

$$\varDelta s = t_2 - t_1 = \left(\varDelta t + \frac{\overline{\mathrm{AD}}}{w}\right) - \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{w}$$

$$\therefore \quad \varDelta t - \varDelta s = \frac{\overline{\mathrm{AC}} - \overline{\mathrm{AD}}}{w} \qquad \cdots(1) \quad \cdots(答)$$

い. $\overline{\mathrm{CD}} = v\varDelta s$ であるので，問題に与えられた式と近似により

$$\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}}\cos\alpha + \overline{\mathrm{CD}}\cos\theta$$

$$\overline{\mathrm{AC}} \fallingdotseq \overline{\mathrm{AD}} + v\cos\theta \cdot \varDelta s \qquad \cdots(答)$$

う.い.の $\overline{\mathrm{AC}}$ を(1)に代入して

$$\varDelta t - \varDelta s = \frac{v\cos\theta \cdot \varDelta s}{w} \qquad \therefore \quad \frac{\varDelta t}{\varDelta s} = 1 + \frac{v\cos\theta}{w} \qquad \cdots(\mathrm{A}) \quad \cdots(答)$$

え. 音波の１周期分を波１個として，A で発せられた音波の数は $f\varDelta t$, P が受け取った音波の数は $f_P\varDelta s$ なので

$$f\varDelta t = f_P \varDelta s \qquad \cdots(答)$$

お.(A)の式を代入して

$$\frac{f_P}{f} = \frac{\varDelta t}{\varDelta s} = 1 + \frac{v\cos\theta}{w} \qquad \cdots(答) \quad \cdots(2)$$

か.(2)と問題文中の(3)式より f_P を消去して

$$\left(1 + \frac{v\cos\theta}{w}\right)f = \left(1 - \frac{v\cos\theta}{w}\right)F \qquad \therefore \quad \cos\theta = \frac{w}{v}\left(\frac{F-f}{F+f}\right) \qquad \cdots(\mathrm{B}) \quad \cdots(答)$$

き.音波の先頭が AC 間を往復して，A で時刻 T で音が聞こえ始めるので，AC 間にかかる時間は $\dfrac{1}{2} \times T$ …(答)

く.き.より $\overline{\mathrm{AC}} = w \times \dfrac{T}{2}$ である。(B)式も利用して

$$\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}}\sin\theta = \frac{wT}{2}\sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{wT}{2}\sqrt{1-\left(\frac{w}{v}\right)^2\left(\frac{F-f}{F+f}\right)^2} \qquad \cdots(答)$$

け. P が点 A で音を受け取る時刻は $\dfrac{T}{2}$ である。ゆえに

$$t_B = \frac{T}{2} + \frac{\overline{\mathrm{CB}}}{v} = \frac{T}{2} + \frac{\overline{\mathrm{AC}}\cos\theta}{v} = \frac{T}{2} + \frac{wT}{2v} \times \frac{w}{v}\left(\frac{F-f}{F+f}\right)$$

$$= \frac{T}{2}\left\{1 + \left(\frac{w}{v}\right)^2\left(\frac{F-f}{F+f}\right)\right\} \qquad \cdots(答)$$