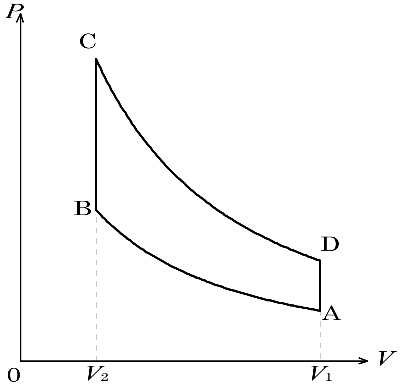

n モルの単原子分子理想気体が封入された熱機関がある。図はこの熱機関の動きを示す P–V グラフである。(この熱機関は自動車のエンジンなどに用いられるものを理想化したもので，オットーサイクルと呼ばれる)。状態A→B，C→Dは断熱変化，状態B→C，D→Aは定積変化であり，状態A，Dの体積は V_1，状態B，Cの体積は V_2，また状態A，B，C，Dのそれぞれの温度は T_A，T_B，T_C，T_D である。気体定数を R として以下の問いに答えよ。

(1)状態C→Dで外部へする仕事を求めよ。

(2)状態B→Cで外部から与えられる熱を求めよ。

(3) 断熱変化では，$\gamma = \dfrac{\text{定圧モル比熱}}{\text{定積モル比熱}}$ として，圧力 P，体積 V の間に $PV^{\gamma} =$ 一定 の関係がある。温度 T_B を T_A，V_1，V_2，γ を用いて表せ。同様に温度 T_C を T_D，V_1，V_2，γ をで表せ。

(4)熱機関が１サイクルで外部にする仕事を，T_A，T_D，V_1，V_2，γ を用いて表せ

(5)以上の結果を踏まえて，この熱機関の効率を，V_1，V_2，γ を用いて表せ。

(6)この熱機関の効率を高めるには，$\dfrac{V_1}{V_2}$ (これを圧縮比という)を大きくした方が良いか，小さくした方が良いか考察せよ。

(解説)このように定積変化と断熱変化を組み合わせた熱機関をオットーサイクルという。外部から熱を与えるのは，B→C の過程だけである。

断熱変化では，$\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ (ただし，C_P =定圧モル比熱，C_V =定積モル比熱，γ を比熱比という)として，圧力 P，体積 V の間に $PV^{\gamma}=$一定 の関係があるが，温度を T としてボイル・シャルルの法則 $\dfrac{PV}{T}=$一定 の関係より

$$TV^{\gamma-1}=\text{一定}$$

の関係も成り立つ。(3)でこの関係を初めから用いてもよい。

また，C_P ，C_V の間には $C_P-C_V=R$ の関係があるので $C_P>C_V$ であり、

$$\gamma=\frac{C_P}{C_V}>1$$

である。

(1)C→D の過程で外部にした仕事を W_{CD}，内部エネルギーの変化を $\mathit{\Delta} U_{CD}$ とすると，断熱変化であるので

$$W_{CD}=-\mathit{\Delta} U_{CD}=-\frac{3}{2}nR(T_D-T_C)=\frac{3}{2}nR(T_C-T_D) \quad \cdots(\text{答})$$

(2) B→C の過程で気体に与えた熱 Q_{BC} は，定積変化であるので

$$Q_{BC}=\frac{3}{2}nR(T_C-T_B) \quad \cdots(\text{答})$$

(3)状態 A，B の気体の圧力をそれぞれ P_A，P_B とする。状態方程式より

$$P_AV_1=nRT_A \qquad \therefore \quad P_A=\frac{nRT_A}{V_1} \quad \cdots①$$

$$P_BV_2=nRT_B \qquad \therefore \quad P_B=\frac{nRT_B}{V_2} \quad \cdots②$$

断熱変化であるので，問題文に与えられた式より

$$P_AV_1^{\gamma}=P_BV_2^{\gamma}$$

①，②式の P_A，P_B を代入して

$$\frac{nRT_A}{V_1}\times V_1^{\gamma}=\frac{nRT_B}{V_2}\times V_2^{\gamma} \qquad \therefore \quad T_B=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}T_A \quad \cdots③ \quad \cdots(\text{答})$$

同様に

$$\frac{nRT_D}{V_1}\times V_1^{\gamma}=\frac{nRT_C}{V_2}\times V_2^{\gamma} \qquad \therefore \quad T_C=\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}T_D \quad \cdots④ \quad \cdots(\text{答})$$

(4)状態 A→B で外部へする仕事 W_{AB} は，C→D と同様に断熱変化であるので

$$W_{AB}=-\frac{3}{2}nR(T_B-T_A)$$

③式の T_B を代入して

$$W_{AB}=-\frac{3}{2}nRT_A\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right\}$$

また，(1)の W_{CD} に④式の T_C を代入して

$$W_{CD}=\frac{3}{2}nRT_D\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}-1\right\}$$

ゆえに 1 サイクルで外部にした仕事 W は

$$W = W_{CD} + W_{AB} = \frac{3}{2}nR(T_D - T_A)\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right\} \qquad \cdots(答)$$

(5)この熱機関に熱を与えたのは B→C の過程だけである。(2)の Q_{BC} に③, ④式の T_B, T_C を代入して

$$Q_{BC} = \frac{3}{2}nR\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}T_D - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}T_A\right\} = \frac{3}{2}nR(T_D - T_A)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}$$

ゆえに, 熱効率 e は

$$e = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{\frac{3}{2}nR(T_D - T_A)\left\{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1\right\}}{\frac{3}{2}nR(T_D - T_A)\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} = \frac{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}} = 1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma} \qquad \cdots(答)$$

(別解)③, ④式を最後に使う。

$$W_{CD} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_D) \quad , \quad W_{AB} = -\frac{3}{2}nR(T_B - T_A)$$

$$\therefore \quad W = W_{CD} + W_{AB} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_D + T_B - T_A)$$

また $Q_{BC} = \frac{3}{2}nR(T_C - T_B)$ であるので

$$e = \frac{W}{Q_{BC}} = \frac{T_C - T_D + T_B - T_A}{T_C - T_B}$$

これに③, ④式の T_B, T_C を代入して整理する。

(6) $\frac{V_1}{V_2} > 1$, $1 - \gamma < 0$ であるので, $\frac{V_1}{V_2}$ が大きいほど $\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{1-\gamma}$ は小さくなり, 効率 e は大きくなる。

圧縮比 $\frac{V_1}{V_2}$ が大きいほど, 効率 e は大きくなる。 $\cdots$(答)